Monotonie stricte de l'intégrale
(dans le cadre de l'intégrale de Riemann)

Jean-François Burnol, 23 septembre 2016

Je remercie Olivier Serman qui m'a signalé que j'avais oublié l'énoncé suivant dans mon polycopié de première année sur l'intégrale de Riemann, [1] en 2003 :

> Théorème : *si f et g sont deux fonctions réelles $\mathcal{R}$-intégrables sur un intervalle $[a,b]$, $a<b$, alors :*
>
> $$f < g \implies \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

Bien sûr, ici je supposerai connu l'énoncé avec des inégalités larges (conséquence immédiate des sommes de Riemann ou directement de la définition même des intégrales inférieures et supérieures de fonctions bornées).

L'intégrale de Lebesgue est plus générale que celle de Riemann, et dans ce cadre l'égalité $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ sous l'hypothèse $f \leqslant g$ ne peut être réalisée que si $f = g$ p.p. [2] Donc si on a $f < g$ (ce qui signifie $\forall x\; f(x) < g(x)$), alors certainement $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$. Mais nous voulons une preuve plus simple, dans le cadre des outils de l'intégrale de Riemann.

En considérant la fonction $h = g - f$, il faut montrer

$$0 < h \implies 0 < \int_a^b h(x)\,dx$$

Ou encore :

$$0 \leqslant h,\ 0 = \int_a^b h(x)\,dx \quad\implies\quad \exists x\; h(x) = 0$$

Si on s'autorisait le critère de Lebesgue pour la $\mathcal{R}$-intégrabilité on dirait que h a nécessairement des points de continuité (ils sont en fait de mesure pleine) et en prenant un tel point de continuité x la conclusion est évidente.

Mais on veut plus simple. Pour cela on prend $\mathrm{N} > 1$ et $\mathcal{S}_+(h,\mathrm{N})$ la somme de Darboux supérieure associée à la décomposition $[a,b] = \cup_k \mathrm{I}_k$, $\mathrm{I}_k = [a + k(b-a)/\mathrm{N}, a + (k+1)(b-a)/\mathrm{N}]$, $0 \leqslant k < \mathrm{N}$. Je rappelle que dans ma définition des sommes de Darboux je calcule les sup locaux M_k sur des intervalles fermés. $\mathcal{S}_+(h,\mathrm{N})$ vaut $(b-a)(\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_1 + \cdots + \mathrm{M}_{\mathrm{N}-1})/\mathrm{N}$. Soit $\epsilon > 0$.

1. http://jf.burnol.free.fr/ens.html#riemann
2. On suppose les fonctions intégrables, car de $+\infty = +\infty$ on ne pourrait pas déduire grand chose...

Pour N suffisamment grand $0 \leqslant \mathcal{S}_+(h, \mathrm{N}) \leqslant (b-a)\epsilon$, puisque $\mathcal{S}_+(h, \mathrm{N}) \to \int_a^b h(x)\,dx = 0$. Ainsi la moyenne des M_k est $\leqslant \epsilon$, et donc l'un d'entre eux vérifie $\mathrm{M}_k \leqslant \epsilon$. On a montré qu'il existe un intervalle fermé $\mathrm{J} \subset [\,a, b\,]$, non réduit à un singleton, et tel que $\sup_{\mathrm{J}} h \leqslant \epsilon$.

En appliquant ceci itérativement (bien sûr $\int_{\mathrm{J}} h = 0$) avec $\epsilon_j = j^{-1}$, on a donc l'existence d'intervalles emboîtés $\mathrm{I}_j = [\,a_j, b_j\,]$, $j \geqslant 1$, $a_j < b_j$, choisis de sorte que $\sup_{\mathrm{I}_j} h \leqslant j^{-1}$. La suite (a_j) est croissante et majorée par $b_1 \leqslant b$, soit x sa limite. Comme $a_k \leqslant b_k \leqslant b_j$ pour $k \geqslant j$, on a en passant à la limite $x \leqslant b_j$ pour tout j. Donc x est dans I_j pour tout j. Ainsi $0 \leqslant h(x) \leqslant j^{-1}$ pour tout j et finalement $h(x) = 0$. $\square$

Comme on peut faire cela dans tout sous-intervalle (non singleton) de $[\,a, b\,]$ on peut même affirmer que les zéros de h sont partout denses. Mais bon pour rappel, Lebesgue permet d'affirmer qu'ils sont de mesure pleine ce qui est infiniment mieux !

Exemple : la fonction dans mon polycopié définie sur $[\,0, 1\,]$ par $h(x) = 0$ si x est irrationnel et $h(x) = q^{-1}$ si $x = p/q$ est une fraction irréducible. Cette fonction est intégrable au sens de Riemann, à valeurs positives ou nulles, et d'intégrale $\int_0^1 h(x)\,dx$ nulle. Elle a des zéros, beaucoup même… (dans ce cas ce sont exactement ses points de continuité).