Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S5, année 2006–2007)

M305 : ANALYSE COMPLEXE

Le génial produit infini de Euler pour sinus

Il serait presque criminel de ne pas évoquer la formule d'Euler pour la fonction sinus

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

lorsque l'on fait un cours d'analyse complexe. La question est abordée de manière standard dans la section 14 des exercices de mon cours de l'année 2006, et aussi dans le Chapitre III du polycopié rédigé à l'occasion de l'année 2005, que je vous recommande de toute façon aussi, puisqu'il serait tout autant criminel de ne pas parler de la fonction Gamma. Néanmoins, je pense qu'il est profitable de savoir prouver cette formule sans trop déborder sur d'autres notions. On n'a pas besoin de savoir ce qu'est une fonction holomorphe.

Il existe de nombreuses méthodes, et je vais ici en présenter une qui est de celles inventées par Euler lui-même, elle est très belle. On a simplement ajouté la justification d'une certaine interversion de limites, qu'Euler aurait évidemment produite immédiatement si on la lui avait demandée. J'ai cherché à faire tout de la manière la plus élémentaire possible. En particulier je ne mentionnerai même pas ce que l'on dit habituellement sur la convergence d'un produit infini (pour cela, voir la section 15 des exercices). Tout ce que nous utilisons ici c'est que $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ est défini comme la limite de $\prod_{k=1}^{N} a_k$ lorsque N tend vers l'infini, si cette limite existe.

Lille, le 15 mars 2007,

Jean-François Burnol

1 L'exponentielle

La formule $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n$ est parfois prise comme définition de e^z. Justifions que cette limite existe et vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$. Par la formule du binôme

$$(1 + \frac{z}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n)$$

avec $u_k(n) = (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \frac{z^k}{k!}$ pour $1 \le k \le n$ et $u_k(n) = 0$ pour $k > n$. En tout cas $|u_k(n)| \le M_k = \frac{|z|^k}{k!}$, avec $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, et pour tout k fixé, la limite $\lim_{n\to\infty} u_k(n)$ existe (et vaut $u_k = \frac{z^k}{k!}$). Par un argument bien connu (souvent appelé le test de convergence normale de Weierstrass), cela justifie que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k(n)$$

En effet soit $\epsilon > 0$ et soit N tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k < \epsilon$. Alors $|\sum_{k=1}^{\infty} u_k(n) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=1}^{N} |u_k(n) - u_k| + 2\epsilon$. Pour n suffisamment grand la première somme sera elle aussi $\leq \epsilon$. D'où un écart au plus égal à 3ϵ pour n grand.

2 Le sinus

Euler avait prouvé que $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, cela résulte de $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ et de la série pour e^z. Soit pour n entier :

$$P_n(z) = \frac{1}{2i}\left((1 + \frac{iz}{2n+1})^{2n+1} - (1 - \frac{iz}{2n+1})^{2n+1}\right)$$

Les racines du polynôme P_n (qui est de degré $2n+1$) sont faciles à déterminer, ce sont les x_k tels que $1 + \frac{ix_k}{2n+1} = e^{2\pi i \frac{k}{2n+1}}(1 - \frac{ix_k}{2n+1})$ pour $k \in \mathbf{Z}$, ce qui donne après simplification $x_k = (2n+1)\operatorname{tg}(\pi\frac{k}{2n+1})$. Pour $k = -n \dots n$ nous obtenons $2n+1$ racines distinctes, ce sont donc toutes les racines et elles sont simples. On en déduit une factorisation :

$$P_n(z) = C_n \cdot z \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2(\frac{\pi k}{2n+1})}\right)$$

Comme $C_n = P_n'(0)$ on a en fait $C_n = 1$. Il suffit maintenant de faire tendre n vers l'infini, et donc, sous réserve de justifier que cela est légitime :

$$\sin(z) = \lim P_n(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2(\frac{\pi k}{2n+1})}\right) = z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

3 Justification

Posons $v_0 = z$, $v_k = z \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 j^2}\right)$, et $u_0 = z$, $u_k = v_k - v_{k-1}$, donc $v_k = z + u_1 + \dots + u_k$. De plus pour $k \geq 1$ on a $u_k = -\frac{z^2}{\pi^2 k^2} v_{k-1}$. Par ailleurs on peut majorer pour tout m : $|v_m| \leq |z| \prod_{j=1}^{m}\left(1 + \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2}\right) \leq |z| e^{\sum_{j=1}^{m} \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2}} \leq |z| e^{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{\pi^2 j^2}}$. Donc il existe une constante C (dépendant de z) telle que $|u_k| \leq C\frac{1}{k^2}$ pour tout $k \geq 1$.

Nous pouvons faire exactement pareil pour chaque n fixé avec $v_0(n) = z$, pour $1 \leq k \leq n$ on prend $v_k(n) = z \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2(\frac{\pi j}{2n+1})}\right)$, et pour $k \geq n$ $v_k(n) = P_n(z)$. On pose alors $u_0(n) = z$, et pour $k \geq 1$: $u_k(n) = v_k(n) - v_{k-1}(n)$, donc $v_k(n) = z + u_1(n) + \dots + u_k(n)$. En remarquant que $(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2(\frac{\pi j}{2n+1}) \geq \pi^2 j^2$, on peut majorer chaque $|v_m(n)|$ puis chaque $|u_k(n)|$ exactement comme précédemment. Avec la même constante C on a ainsi $|u_k(n)| \leq C\frac{1}{k^2}$ pour tout $k \geq 1$ et tout $n \geq 0$.

Les conditions de convergence normale sont donc vérifiées pour $\lim_{n\to\infty}(z + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(n))$, et comme bien sûr on a $\lim_{n\to\infty} v_k(n) = v_k$, $\lim_{n\to\infty} u_k(n) = u_k$, finalement on conclut que $\lim_{n\to\infty} P_n(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

La méthode de réécrire un produit (éventuellement infini) sous la forme d'une somme (éventuellement infinie) était bien connue d'Euler, qui l'utilisait souvent.