Université Lille 1 — UFR de Mathématiques
Licence de Mathématiques (L3, S6, année 2006–2007)

M312 : Séries de Fourier et Espaces de Hilbert
Responsable : Jean-François Burnol

Le Théorème de Dirichlet

Le premier théorème général et rigoureux de convergence pour les séries de Fourier fut celui de Dirichlet : *si f est 2π-périodique et monotone par morceaux alors en tout point on a* $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$.

Je dis que f est monotone par morceaux sur $[a, b]$ si il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ la fonction f est monotone[1] et bornée (donc les limites $f(x_i^+)$ et $f(x_{i+1}^-)$ sont finies). Aux points x_i les valeurs $f(x_i)$ sont quelconques. Vous savez tous qu'une fonction monotone admet en tout point des limites à gauche et à droite, c'est donc clairement le cas aussi pour f monotone par morceaux.

Une approche possible au théorème de Dirichlet est la suivante : (1) les sommes de Fejér convergent vers $\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$ en tout x (théorème prouvé en Cours, sans autre hypothèse sur f que l'existence de $f(x^+)$ et de $f(x^-)$), (2) on peut prouver que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ sont $\mathcal{O}(|n|^{-1})$ (exercice XLVI), et (3) on a le théorème taubérien de Hardy (exercice XLIV) qui permet de remonter des sommes de Fejér aux sommes partielles de la série de Fourier grâce à cette propriété $\mathcal{O}(|n|^{-1})$.

L'approche originale, complètement différente, de Dirichlet dans son mémoire de 1829 est très intéressante, et vaut la peine de s'y arrêter.[2] [3] [4]

Il y a un léger défaut dans la formulation du théorème de Dirichlet : c'est que si f et g sont toutes deux monotones par morceaux, ce n'est pas forcément le cas de la somme $f + g$ ou de la différence $f - g$.[5] Pourtant ces combinaisons linéaires vérifieront elles aussi la conclusion du théorème. C'est Camille Jordan, à l'occasion de présenter en cours la preuve de Dirichlet une cinquantaine d'années plus tard (vers 1881), qui a trouvé la bonne formulation : le théorème et sa preuve s'appliquent à toute fonction f qui sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut s'écrire comme la différence $F - G$ de deux fonctions croissantes. Remarquez que cette classe de fonction est clairement stable par combinaison linéaire[6]. De plus elle inclut la classe des fonctions C^1 par morceaux (qui est la classe habituellement considérée dans les livres où l'on présente au niveau premier cycle le théorème de Dirichlet).

---

1. monotone : ou croissante ou décroissante. « Croissant » et « décroissant » sont toujours au sens large.
2. *« L'article de Dirichlet sur les séries de Fourier constitue un tournant de l'analyse mathématique. Son but est simplement de donner un énoncé correct, avec une démonstration correcte, sur la convergence des séries de Fourier. Mais, ce faisant, il constitue un nouveau paradigme de la rigueur en analyse »*, in Séries de Fourier et Ondelettes, J.-P. Kahane et P.G. Lemarié-Rieusset. Ce livre contient une traduction intégrale du texte de Dirichlet.
3. Les fonctions considérées par Dirichlet étaient monotones *et continues* par morceaux.
4. La méthode suivie ici est inspirée de, mais pas rigoureusement identique à celle de Dirichlet.
5. même si f et g sont comme chez Dirichlet aussi continues par morceaux.
6. à coefficients réels, aussi complexes après avoir étendu la condition de Jordan aux fonctions à valeurs complexes en l'exigeant séparément de la partie réelle et de la partie imaginaire.

(A) Montrons qu'une fonction monotone par morceaux sur $[A, B]$ vérifie la propriété de Jordan. Comme cette propriété est stable par combinaison linéaire, il suffira donc de l'établir soit lorsque f est non nulle en un unique point x_0, soit lorsque f est croissante et bornée sur un seul intervalle ouvert $]a, b[\subset [A, B]$ (et nulle sur le complémentaire).

Dans le premier cas, on prend $F(t) = 0$ pour $t < x_0$, $F(x_0) = |f(x_0)|$ et $F(t) = 2|f(x_0)|$ pour $t > x_0$. Alors F est croissante et $F - f$ vaut 0 pour $t < x_0$, $|f(x_0)| - f(x_0)$ pour $t = x_0$ et $2|f(x_0)|$ pour $t > x_0$. Elle est donc aussi croissante, et $f = F - (F - f)$.

Pour f croissante sur un sous-intervalle $]a, b[$, on pose $F(t) = 0$ pour $t \leq a$, $F(t) = f(t) - f(a^+) + |f(a^+)|$ pour $a < t < b$ et $F(t) = f(b^-) - f(a^+) + |f(a^+)| + |f(b^-)|$ pour $t \geq b$. Alors F est croissante. De plus $F - f$ vaut 0 pour $t \leq a$, $-f(a^+) + |f(a^+)|$ pour $a < t < b$ et $f(b^-) - f(a^+) + |f(a^+)| + |f(b^-)|$ pour $t \geq b$ et est donc elle aussi croissante. Et à nouveau $f = F - (F - f)$.

(B) Si $f = F_1 - G_1$ sur $[a, b]$ et $F_2 - G_2$ sur $[b, c]$ avec F_1, F_2, G_1, G_2 croissantes, alors les fonctions $F = F_1$ sur $[a, b]$ et F_2 sur $]b, c]$, $G = G_1$ sur $[a, b]$ et G_2 sur $]b, c]$ sont monotones par morceaux. Donc $F = K - L$, $G = M - N$ avec K, L, M, N croissantes, et $f = F - G = K + N - (L + M)$. Par récurrence on étend à un nombre fini quelconque d'intervalles successifs. La propriété de Jordan peut donc « se tester par morceaux ».

(C) Donc pour montrer qu'une fonction C^1 par morceaux vérifie la condition de Jordan, il suffit de le faire pour f de classe C^1 sur $[a, b]$, et à valeurs réelles. On pose $F(t) = f(a) + \int_a^t |f'(x)|\,dx$. La fonction F est croissante, et $F(t) - f(t) = \int_a^t (|f'(x)| - f'(x))\,dx$ l'est aussi.

La condition de Jordan a un nom : si f la vérifie on dit que f est de **variation bornée.** Je n'ai pas besoin d'en dire plus ici et je vous renvoie, si vous voulez en apprendre plus, au texte disponible sur mon site[7] avec le titre *« Variation bornée et Dirichlet-Jordan ».* Ce texte contient d'ailleurs encore deux autres démonstrations du théorème de Dirichlet.

Pour démontrer le théorème de Dirichlet, pour f qui est 2π-périodique et de variation bornée sur $[-\pi, +\pi]$ (donc sur tout intervalle fini), il suffit de le faire pour $x_0 = 0$ (car le cas général s'obtient alors en appliquant le cas particulier à la fonction $f(x + x_0)$). Alors, calculs habituels, on a $S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)(f(t) + f(-t))\,dt$. Le problème est donc ramené à celui de prouver, pour g de variation bornée sur $[0, \pi]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} g(t)\,dt = g(0^+) \ ,$$

1 La deuxième formule de la moyenne

Théorème : *soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné, f intégrable à valeurs réelles, et g décroissante et positive sur $[a, b]$. Alors, on a la deuxième formule de la moyenne :*

$$\exists \xi \in [a, b] \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

Comme g est bornée la fonction fg est bien intégrable. On sait que la fonction $t \mapsto F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ est continue. Soit M son maximum et m son minimum. L'image $F([a, b])$ est l'intervalle $[m, M]$ (théorème des valeurs intermédiaires). Donc pour montrer la deuxième formule de la moyenne il suffit de montrer les inégalités :

$$g(a)m \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq g(a)M$$

7. jf.burnol.free.fr/ens.html

Soit $N \geq 1$ et soit $x_j = a + j\frac{b-a}{N}$, $0 \leq j \leq N$. Définissons : $I_N = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)g(x_j)\,dx$. On a, compte tenu que g est décroissante :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)g(x_j)\,dx\right| &\leq \sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|(g(x_j)-g(x))\,dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1}(g(x_j)-g(x_{j+1}))\int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

Soit $K(t) = \int_a^t |f(x)|\,dx$. Soit $\omega(N) = \sup_{a\leq t\leq b-\frac{b-a}{N}} |K(t+\frac{b-a}{N}) - K(t)|$. On sait que K est continue, donc uniformément continue sur $[a,b]$, donc $\omega(N) \to 0$. Or d'après ce qui précède $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx - I_N\right| \leq \omega(N)\sum_{j=0}^{N-1}(g(x_j)-g(x_{j+1})) = \omega(N)(g(a)-g(b))$. Donc

$$\lim_{N\to\infty} I_N = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Écrivons $I_N = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)g(x_j)\,dx$ sous la forme (on rappelle que $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$) :

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)(F(x_{j+1}) - F(x_j)) = \sum_{j=0}^{N-1}(g(x_j)-g(x_{j+1}))F(x_{j+1}) + g(b)F(b)$$

Il est conseillé d'écrire les sommes de manière explicite afin de bien s'assurer qu'aucune erreur d'indice n'a été faite. Bref, comme g est décroissante et $g(b) \geq 0$ les inégalités

$$g(a)\inf_{[a,b]} F(t) \leq I_N \leq g(a)\sup_{[a,b]} F(t)$$

sont alors évidentes. Et comme $\lim_{N\to\infty} I_N = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, la deuxième formule de la moyenne est démontrée.

On pourrait présenter quelques variantes, je renvoie pour cela à mon texte (un peu lourd peut-être, désolé) *« Variation bornée et Dirichlet-Jordan »* sur la toile. Je signale seulement ici que si f n'est plus supposée à valeurs réelles, vous prouverez en relisant la preuve ci-dessus qu'en tout cas :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq g(a)\sup_{[a,b]}\left|\int_a^t f(x)\,dx\right|$$

Évidemment tout l'intérêt de la majoration est que le module complexe est à l'extérieur et non pas à l'intérieur des deux intégrales !

2 Premier théorème limite de Dirichlet

Théorème : Soit f de variation bornée sur $[0,b]$ (avec $0 < b < \infty$). Alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} f(x)\,dx = f(0^+)\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Le résultat est vrai si f est constante car $\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x}\,dx = \int_0^{\lambda b} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$. C'est un exercice classique de montrer que $\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existe. On peut par exemple intégrer par parties pour se ramener à l'intégrale absolument convergente $\int_1^\infty \cos(x)x^{-2}\,dx$. Ou alors on utilise la deuxième formule de la moyenne $\left|\int_R^S \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \leq \frac{1}{R}\sup_{R\leq t\leq S}|\int_R^t \sin(x)\,dx| \leq \frac{2}{R}$, et donc le critère de Cauchy est vérifié pour l'existence de la limite.

Pour la preuve du théorème, on peut supposer f à valeurs réelles et décroissante, puis en l'écrivant $f = (f+A) - A$ avec $A \gg 1$ on peut supposer f décroissante positive. On écrit alors :

$$\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} f(x)\,dx = \int_0^{\lambda b} \frac{\sin(x)}{x} f(\frac{x}{\lambda})\,dx = \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} f(\frac{x}{\lambda})\,dx + \int_R^{\lambda b} \frac{\sin(x)}{x} f(\frac{x}{\lambda})\,dx$$

Pour $R > 0$ fixé on a convergence uniforme sur $[0,R]$ de $f(\frac{x}{\lambda})$ vers $f(0^+)$. Par ailleurs par la deuxième formule de la moyenne $\left|\int_R^{\lambda b} \frac{\sin(x)}{x} f(\frac{x}{\lambda})\,dx\right| \leq \frac{1}{R} f(\frac{R}{\lambda})2 \leq \frac{2f(0^+)}{R}$. Soit $\epsilon > 0$. On choisit R de sorte que $\frac{2f(0^+)}{R} \leq \epsilon$. Puis on choisit Λ tel que pour $\lambda \geq \Lambda$ on a $|\int_0^R \frac{\sin(x)}{x} f(\frac{x}{\lambda})\,dx - \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} f(0^+)\,dx| \leq \epsilon$. Alors pour ces λ on a

$$\left|\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} f(x)\,dx - \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} f(0^+)\,dx\right| \leq 2\epsilon$$

On a aussi $|\int_R^S \frac{\sin(x)}{x} f(0^+)\,dx| \leq \frac{1}{R} f(0^+)2 \leq \epsilon$. Donc $|\int_R^\infty \frac{\sin(x)}{x} f(0^+)\,dx| \leq \epsilon$. Donc

$$\lambda \geq \Lambda \implies \left|\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x} f(x)\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} f(0^+)\,dx\right| \leq 3\epsilon$$

3 Deuxième théorème limite de Dirichlet

Théorème : Soit f de variation bornée sur $[0,b]$ avec $0 < b < 2\pi$. On a

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\frac{x}{2})} f(x)\,dx = f(0^+)$$

Il suffit par linéarité de le montrer pour f croissante à valeurs positives (ce qui inclut le cas de f constante positive). On remarque que la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin(\frac{1}{2}x)}$ est croissante (et positive) sur $[0,b]$ (concavité de sinus sur $[0,\pi]$). Donc $\frac{x}{\sin(\frac{1}{2}x)} f(x)$ l'est aussi. On applique le premier théorème et on obtient :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\frac{x}{2})} f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x}\frac{xf(x)}{\sin(\frac{x}{2})}\,dx = \frac{2f(0^+)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

Il ne reste plus qu'à déterminer $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$. Pour cela on utilise le théorème avec f constante égale à 1 et en se limitant aux $\lambda = n + \frac{1}{2}$, n entier, et en prenant $b = +\pi$, car on sait qu'à gauche on a alors toujours 1. Donc le théorème est prouvé et en plus on a appris que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (« intégrale de Dirichlet », qui n'est que semi-convergente).

