Le Théorème de la convergence dominée pour les fonctions intégrables au sens de Riemann

Jean-François Burnol, 21 février 2012

J'ai déjà proposé une démonstration du théorème de la convergence dominée, dans le cadre de l'intégrale de Riemann, dans [1]. À mon avis une « bonne » démonstration doit concilier deux aspects presque contradictoires (on va donc dire plutôt complémentaires) : (1) *ne pas être un copié-collé d'une preuve appartenant clairement à la théorie de la mesure,* (2) *motiver la mise en place de la mesure de Lebesgue.* Dans [1] je développais un tout petit peu de la notion de mesure, uniquement pour les ouverts. Même si les deux ou trois énoncés prouvés sur ces « longueurs d'ouverts » restaient très abordables, l'emploi sous-jacent (ou tacite) de séries doubles positives, lié au nombre possiblement infini des composantes connexes, élevait le niveau des pré-requis.

Je fais ici une nouvelle tentative qui ne manipule plus, essentiellement, que des « ufi » : des unions finies d'intervalles. L'énoncé prouvé est un théorème de convergence dominée avec des hypothèses plus faibles que dans [1] (l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ où l'on n'a pas d'information peut être infini), du coup alors que dans [1] le seul théorème topologique utilisé était la convergence des suites monotones bornées, ici la notion de partie compacte est fortement sollicitée. J'ai pensé que de toute façon il n'était pas raisonnable de prouver un théorème comme celui de la convergence dominée à un public n'ayant pas le minimum des notions en topologie générale qui sont indispensables en Analyse. Par contre j'ai voulu éviter la focalisation sur les fonctions continues et l'emploi du Théorème de Dini : je préfère démontrer un énoncé (le « Lemme clé ») qui va vers la théorie de la mesure, mais peut néanmoins être obtenu avec très peu de préliminaires. Savoir si j'ai évité l'écueil (1) et correctement répondu à (2) est bien sûr une affaire de goût, c'est un équilibre très délicat !

Je prouve donc une version du théorème de la convergence dominée avec un ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ pouvant être infini dénombrable.

Il ne faut alors pas travailler beaucoup plus pour avoir un énoncé avec un $\mathcal{E}$ de mesure nulle : je le fais aussi, mais dans une annexe, pour ne pas rendre la preuve trop intimidante dès le départ. Riemann lui-même est le premier à avoir rencontré la notion d'ensemble de mesure nulle : dans sa caractérisation des fonctions intégrables en son sens. C'est une notion qui repose crucialement sur les unions dénombrables, et donc me paraît devoir être la toute première étape vers la mesure de Lebesgue : comme ce n'est pas mon propos ici j'en dis le minimum suffisant pour énoncer et prouver le théorème de convergence dominée avec des fonctions intégrables au sens (généralisé) de Riemann.

1 La convergence dominée

Je rappelle que l'intégrale de Riemann est insensible à la modification d'une fonction en un nombre fini de points, le choix d'un intervalle fermé plutôt que par exemple ouvert dans l'énoncé suivant n'a donc aucune importance. Lorsque que je dis que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a une intégrale généralisée, je fais référence à un éventuel découpage fini de $[a,b]$, dépendant de f, et pour lequel l'intégrale de Riemann de f est généralisée en chacun des points effectuant ce découpage.

Théorème 1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$, une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, possédant chacune une intégrale de Riemann au sens généralisé sur $[a,b]$, $a < b$. On suppose qu'il existe une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ possédant une intégrale de Riemann généralisée, ainsi qu'une partie $\mathcal{E} \subset [a,b]$ vide, finie, ou infinie dénombrable, tels que :*

1. *pour tout $x \notin \mathcal{E}$ la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge,*
2. *pour tout $x \notin \mathcal{E}$, on a $\forall n\ |f_n(x)| \leqslant g(x)$.*

Alors la limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\ ,$$

existe (et est finie). Si de plus on suppose qu'il existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possédant une intégrale de Riemann au sens généralisé et telle que $\lim f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \notin \mathcal{E}$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\ .$$

Pour déduire la deuxième partie de l'énoncé de la première il suffit d'utiliser la suite $f_1, f, f_2, f, f_3, f, \ldots$. On aura remarqué que la majoration en dehors de $\mathcal{E}$ de f par g est une conséquence des hypothèses. Les intégrales possédant donc une limite, cette limite ne peut être autre chose que $\int_a^b f(x)\,dx$.

Nous allons utiliser dans la preuve du théorème un Lemme clé, qui, pour être énoncé, nécessite quelques définitions préliminaires.

2 Longueurs d'intervalles

Je vais considérer que le fait suivant : « *toute union finie d'intervalles peut s'écrire comme une union finie d'intervalles disjoints* », est suffisamment simple pour être admis. L'énoncé plus précis « *toute union finie d'intervalles a un nombre fini de composantes connexes qui sont chacune des intervalles* », est un peu moins simple et on va pouvoir faire sans (même si on a plutôt intérêt à visualiser mentalement ce qu'il veut dire).

Définition 1. *Une (ou un)* ufi *A est une partie de $\mathbb{R}$ qui est une union finie d'intervalles. Si A est bornée on dit qu'on a une* ufib. *Si A est fermée une* ufif. *Si A est compact une (ou un)* ufic. *Si A est ouvert une* ufio. *Le complémentaire d'un ufi est un ufi. L'intersection et l'union de deux, plus généralement d'un nombre fini de ufi est un ufi.*

Théorème 2. *Pour tout ufi* A *la limite suivante, éventuellement infinie,*

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\#\left(A\cap\frac{1}{p}\mathbb{Z}\right),$$

existe dans $\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$*. On la notera* $|A|$ *et l'appellera « longueur de* A *». Lorsque* A *est un intervalle* I *non vide et borné,* $|I|$ *est la différence entre son extrémité droite et son extrémité gauche (chacune pouvant ou non appartenir à* I*). On a* $|\emptyset| = 0$*.*

Preuve. Si A contient un intervalle non borné la limite est $+\infty$. Sinon, A est une union finie disjointe d'intervalles bornés I_j (éventuellement des singletons). Il suffit de montrer que pour chacun d'entre eux la limite correspondante existe (et est finie). Soient a et b les extrémités d'un intervalle I. Si $a = b$ la limite existe et vaut zéro. Si $a < b$, on a pour $pb - pa - 1 \geqslant 0$ l'estimation :

$$pb - pa - 1 \leqslant \#\left(I\cap\frac{1}{p}\mathbb{Z}\right) \leqslant pb - pa + 1,$$

qui est prouvée élémentairement et qui donne le résultat. □

Théorème 3. *On a* $|\cup_j A_j| = \sum_j |A_j|$ *pour toute union finie disjointe de ufi,* $|\cup_j A_j| \leqslant \sum_j |A_j|$ *pour toute union finie de ufi, et :*

$$|A\cup B| + |A\cap B| = |A| + |B|$$

pour deux ufi quelconques.

Preuve. Ce sont des corollaires immédiats du Théorème précédent. Par exemple, la dernière formule est vraie si A ou B est de longueur infinie, et on pourra donc supposer A et B tous deux de longueurs finies. Pour chaque p les intersections avec $\frac{1}{p}\mathbb{Z}$ sont des ensembles finis, et on applique la formule $\#(E\cup F) + \#(E\cap F) = \#E + \#F$ valable pour les ensembles finis. On pourrait également exprimer et prouver directement la formule d'inclusion-exclusion. Et on pourrait utiliser au lieu de la définition 2 une approche via les propriétés supposées dejà connues de l'intégrale de Riemann pour les fonctions en escaliers ! □

Voici un corollaire, que j'énonce déjà ici car sa technique de preuve va être à nouveau utilisée dans la section suivante :

Théorème 4. *Si* $a < b$*, l'intervalle* $[a, b]$ *n'est pas dénombrable.*

Preuve. Supposons le contraire : $[a, b] = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $O_n = \cup_{m\leqslant n}]x_m - 2^{-m}\varepsilon, x_m + 2^{-m}\varepsilon[$. Le recouvrement du compact $[a, b]$ par les ouverts O_n admet un sous-recouvrement fini, donc $[a, b] \subset O_n$ pour un certain n. Donc la longueur $b - a$ est majorée par la longueur de O_n elle-même majorée par $\sum_{m=0}^{\infty} 2\cdot 2^{-m}\varepsilon = 4\varepsilon$. Pour $\varepsilon < \frac{b-a}{4}$ c'est une contradiction. □

3 Le Lemme clé

Théorème 5. *Soit* A_j, $j \geqslant 1$ *des ufi dans un même intervalle* $[a, b]$. *Si leurs longueurs* $|A_j|$ *sont toutes minorées par une même constante* η *strictement positive, alors l'ensemble des* $x \in [a, b]$ *qui appartiennent à une infinité des* A_j *est non vide, et même non dénombrable.*

Preuve. Tout d'abord, quitte à diminuer un peu η on peut d'emblée supposer que tous les A_j sont compacts, en les remplaçant chacun par un sous ufi, compact, approprié. On pose $N_0 = 0$ et $F_0 = [a, b]$. La suite $L_n = |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ est croissante et majorée par $b - a$, donc il existe $n = N_1 > 0$ tel que $L_m \leqslant L_n + \frac{1}{2}\eta$ pour tout $m > n$. Posons alors $F_1 = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, qui comme union finie de compacts est un compact. Par les propriétés que nous avons prouvées pour les longueurs, on a $|A_m| = |A_m \setminus F_1| + |A_m \cap F_1|$ et pour $m > n$: $|A_m \setminus F_1| \leqslant |(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \setminus F_1| \leqslant \frac{1}{2}\eta$. Donc $|A_m \cap F_1| \geqslant \eta_1 = \frac{1}{2}\eta$.

Supposons connus $\eta_k > 0$, $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k$, $N_1 < N_2 < \cdots < N_k$, tels que pour tout $m > N_k$ on ait $|A_m \cap F_k| \geqslant \eta_k$. Posons provisoirement, pour $m > N_k$, $B_m = A_m \cap F_k$. On définit N_{k+1} comme étant le plus petit entier $n > N_k$ tel que

$$|\cup_{N_k < m \leqslant n} B_m| + 2^{-k-1}\eta_k \geqslant \lim_{M \to +\infty} |\cup_{N_k < m \leqslant M} B_m| \qquad (\leqslant b - a < \infty) .$$

Soit alors $F_{k+1} = (A_{N_k+1} \cup \ldots \cup A_{N_{k+1}}) \cap F_k$. Ainsi F_{k+1} est un sous-compact de F_k et la construction est telle que

$$m > N_{k+1} \implies |A_m \cap F_{k+1}| \geqslant \eta_{k+1} = (1 - 2^{-k-1})\eta_k > 0$$

et peut être itérée.

On a alors une intersection décroissante $F = \cap_k F_k$ de compacts non vides : cette intersection est donc non vide, or tout x de F appartient par construction à une infinité des A_n. On a même mieux : pour tout $k \geqslant 1$, $|F_k| \geqslant |A_{N_k} \cap F_{k-1}| \geqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1 - 2^{-k})\eta =: \varepsilon > 0$. On va en déduire que l'intersection (que nous savons déjà non vide) $F = \cap F_k$ ne peut pas être dénombrable.

Supposons $F = \{x_n, 0 \leqslant n < N\}$, $N \leqslant \infty$. Soit $O_n = \cup_{m \leqslant n}]x_m - 4^{-m-1}\varepsilon, x_m + 4^{-m-1}\varepsilon[$ et $O = \cup_n O_n$. Comme F est compact $F \subset O_n$ pour un certain n. Mais $F_k \cap O_n$ est un ufi de longueur majorée par $2\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} 4^{-m} = \frac{2}{3}\varepsilon$. Ainsi l'ufic $F'_k = F_k \setminus O_n$, qui ne rencontre pas F, est de longueur au moins $\frac{1}{3}\varepsilon$, et en particulier est non vide. Or les $F'_k \subset F_k$ sont compacts et forment une chaîne décroissante pour l'inclusion. Leur intersection est non vide et ne rencontre pas F, contradiction. □

4 Démonstration du Théorème de la convergence dominée

Preuve. Si la suite $(\int_a^b f_n(x)\,dx)_{n \geqslant 1}$ ne converge pas vers une limite finie, elle n'est pas de Cauchy, donc il existe $\varepsilon > 0$ ainsi que $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ avec $\forall k \geqslant 1$,

$\left|\int_a^b f_{n_k}(x)\,dx - \int_a^b f_{m_k}(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon$. Définissons $g_k(x) = f_{n_k}(x) - f_{m_k}(x)$. Si x n'est pas dans l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ on a $|g_k(x)| \leqslant 2g(x)$ et $\lim g_k(x) = 0$.

Pour chaque k on peut découper $[a, b]$ en une subdivision (finie, bien sûr) de sorte que sur chaque $]a_{2j}, a_{2j+1}]$ (resp. $[a_{2j+1}, a_{2j+2}[$) et g et g_k sont intégrables au sens de Riemann sur les $[a_{2j} + \eta, a_{2j+1}]$ (resp. $[a_{2j+1}, a_{2j+2} - \eta]$), $\eta \ll 1$. On peut calculer $\int_c^d |g_k(x)|\,dx$ pour $[c, d]$ ne rencontrant aucun des a_{2j} comme une limite de sommes de Riemann (pointées) et comme $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable, toutes les évaluations peuvent être faites en dehors de $\mathcal{E}$. Ceci montre que $\int_c^d |g_k(x)| dx \leqslant 2 \int_c^d g(x)\,dx$. On en déduit que les intégrales généralisées $\int_a^b |g_k(x)|\,dx$ existent, et sont majorées par $2 \int_a^b g(x)\,dx$.

Par construction $\varepsilon \leqslant \left|\int_a^b g_k(x)\,dx\right|$, et a fortiori $\varepsilon \leqslant \int_a^b |g_k(x)|\,dx$. Si l'on remplace g_k par zéro sur des intervalles (indépendants de k) suffisamment petits entourant les points en nombre fini où l'intégrale de g est généralisée, on modifie, par le paragraphe précédent, arbitrairement peu, et uniformément en k, la valeur de $\int_a^b |g_k(x)|\,dx$: disons que les intégrales sont maintenant toutes au moins $\frac{2}{3}\varepsilon$. Sur le complémentaire de ces intervalles la fonction g est intégrable au sens de Riemann, donc *bornée*. On pourra dorénavant sans perte de généralité supposer que g est une *constante* $C > 0$.

On choisit une fonction en escalier ϕ_k avec $0 \leqslant \phi_k \leqslant |g_k|$ et $\frac{1}{2}\varepsilon \leqslant \int_a^b \phi_k(x)\,dx$. Puis on prend une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$ adaptée à ϕ_k et on note U_k l'union des intervalles $]x_{j-1}, x_j[$ tels que la valeur (majorée par $2C$) de ϕ_k sur ces intervalles soit $> \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{b-a}$. Alors

$$\frac{1}{2}\varepsilon \leqslant \int_a^b \phi_k(x)\,dx \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{b-a}(b-a) + 2C|U_k|$$

et par conséquent $|U_k| \geqslant \varepsilon/8C$.

On invoque alors le Lemme clé et il existe donc $x \in\,]a, b[\setminus\mathcal{E}$ qui appartient à une infinité des U_k. Ce x est tel que $|f_{n_k}(x) - f_{m_k}(x)| \geqslant g_k(x) \geqslant \phi_k(x) > \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{b-a}$ pour une infinité de k, ce qui prouve que la suite $(f_n(x))$ n'est pas de Cauchy, et contredit l'hypothèse de l'existence de $\lim f_n(x)$ pour les $x \notin \mathcal{E}$. □

5 Mesure nulle

Il est un peu frustrant de s'être arrêté à des $\mathcal{E}$ dénombrables : la notion qui nous tend la main est celle de « mesure nulle ». Le piège est le suivant : il ne faut surtout pas définir un ensemble (borné) E comme étant de mesure nulle si « pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une union finie A d'intervalles telle que $E \subset A$ et $|A| \leqslant \varepsilon$ ». Car on n'arriverait alors jamais à montrer que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est de mesure nulle ! Car une ufi A qui contient $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ contient tout de $[0, 1]$ à l'exception au plus d'un nombre fini d'irrationnels, et est donc de longueur au moins 1 !

Définition 2. *On dit qu'une partie* E *de* $\mathbb{R}$ *est de mesure nulle si pour tout* $\varepsilon > 0$ *on peut écrire* $E \subset \cup_{n\geqslant 1} A_n$ *avec des unions finies d'intervalles* A_n *telles que pour tout* N*, la longueur de chaque* $A_1 \cup \ldots \cup A_N$ *est au plus* ε*.*

Théorème 6. *Tout* E *dénombrable est de mesure nulle.*

Preuve. On utilise des singletons ! □

Théorème 7. *Une partie* $E \subset \mathbb{R}$ *est de mesure nulle si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *on peut écrire* $E \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ *avec* $U_n \subset U_{n+1}$ *des ufi ouverts vérifiant* $|U_n| \leqslant \varepsilon$ *pour tout* n*.*

Preuve. Soit $E \subset \cup_n B_n$ avec des ufi formant une chaîne croissante et vérifiant $|B_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. On choisit C_n un ufi ouvert contenant B_n et avec $|C_n| \leqslant |B_n| + 2^{-n-1}\frac{1}{2}\varepsilon$. Puis, on pose $U_n = C_0 \cup \cdots \cup C_n$. □

Théorème 8. *Les seuls ufi* A *de mesure nulle sont les ensembles finis.*

Preuve. Il suffit de montrer que $I = [a, b]$, $a < b$, n'est pas de mesure nulle. Car si on écrit A comme une union disjointe finie d'intervalles, chacun devra être un singleton. Supposons $I \subset \cup_n U_n$ avec une union croissante d'ufi ouverts, chacun de longueur au plus $\varepsilon > 0$. Par compacité $I \subset U_n$ pour un certain n. Donc $b - a \leqslant \varepsilon$, contradiction pour ε petit. □

Bien sûr l'énoncé suivant devrait être « *Toute union dénombrable* $E = \cup_{j\geqslant 1} E_j$ *de parties de mesure nulle est de mesure nulle.* » mais je ne vais pas le démontrer ici, car je n'en ai pas besoin pour prouver le Théorème de la convergence dominée 1 avec un ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ autorisé à être de mesure nulle. Remarquons déjà qu'avec le Théorème 8 nos arguments relatifs aux fonctions g_k dans la preuve du Théorème 1 fonctionnent avec un $\mathcal{E}$ de mesure nulle (choix des points dans une somme de Riemann, majoration $\phi_k \leqslant 2C$). Il ne reste donc plus qu'à prouver le Lemme clé sous la forme renforcée :

Théorème 9. *Soit* A_j*,* $j \geqslant 1$ *des ufi dans un même intervalle* $[a, b]$*. Si leurs longueurs* $|A_j|$ *sont toutes minorées par une même constante* η *strictement positive, alors l'ensemble des* $x \in [a, b]$ *qui appartiennent à une infinité des* A_j *n'est pas de mesure nulle.*

Preuve. On sait que cet ensemble E contient un compact $F = \cap_k F_k$, intersection décroissante d'ufic chacun de longueur au moins $\varepsilon > 0$. Si E était de mesure nulle, F le serait aussi, donc on aurait $F \subset \cup U_n$ avec une chaîne croissante d'ufio, tous de longueurs majorées par $\frac{1}{2}\varepsilon$. Comme F est compact, il est inclus dans l'un des U_n. Par un raisonnement topologique bien connu il existe un k tel que $F_k \subset U_n$: le complémentaire $D = \mathbb{R} \setminus U_n$ est fermé et les $F_k \cap D$ sont des compacts, formant une chaîne décroissante, qui par construction a une intersection vide. Donc $F_k \cap D = \emptyset$ pour un des k. Cependant on a $|F_k| > |U_n|$ et l'inclusion $F_k \subset U_n$ est impossible. □

Il est temps maintenant d'apprendre l'intégrale de Lebesgue !

[1] http://jf.burnol.free.fr/convergencedominee.pdf, novembre 2009.