Une nouvelle approche est disponible (fév. 2012) :
http://jf.burnol.free.fr/convergencedominee_v2.pdf

Le Théorème de la convergence dominée pour les fonctions Riemann-intégrables

Jean-François Burnol, novembre 2009

1 La convergence dominée

Comme de nos jours on mentionne et utilise la convergence dominée dès les premiers cours de théorie de l'intégration, et qu'il n'est pas une bonne pratique d'utiliser des théorèmes sans preuve (surtout que la convergence uniforme doit certainement suffire pour tous les problèmes que l'on peut imaginer donner en première ou deuxième année), j'ai rédigé une preuve de l'énoncé suivant, qui est un cas spécial du théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

Théorème 1. *Soit $a < b$ et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$, convergeant simplement vers une fonction f :*

$$\forall x \in \,]a, b[\quad \lim f_n(x) = f(x)$$

On suppose que la convergence est dominée (ou plutôt, «bornée») :

$$\exists C \qquad \forall n \geq 1 \ \forall x \in \,]a, b[\qquad |f_n(x)| \leq C$$

Alors $\lim \int_a^b f_n(x)\,dx$ existe et, si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ alors

$$\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Corollaire 1 (Convergence dominée). *Si les f_n et f sont R-intégrables sur tous les $[a + \eta, b]$, $\eta > 0$, et si*

$$\forall x \in \,]a, b[\quad \lim f_n(x) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 1 \ \forall x \in \,]a, b[\quad |f_n(x)| \leq g(x)$$

avec g R-intégrable sur tous les $[a + \eta, b]$ et telle que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(x)\,dx$ existe, alors les intégrales (de Riemann) généralisées $\int_a^b f_n(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$ existent et $\lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Même énoncé avec des intégrales du type $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$.

La preuve du corollaire sera laissée au lecteur.

La preuve du Théorème 1 a comme outil la notion de longueur $|V|$ pour un ouvert de $]a,b[$. On peut établir en première année du cours d'Analyse :

1. tout ouvert non vide V de $]a,b[$ s'écrit comme une union disjointe finie ou infinie d'intervalles ouverts $\cup_{k\geq 1}]a_k,b_k[$, $a \leq a_k < b_k \leq b$,
2. les $I_k =]a_k,b_k[$ sont uniques à l'ordre près, ce sont les classes d'équivalence pour la relation sur V : $x \sim y \iff [x,y] \subset V$,
3. la longueur de V est définie par $|V| = \sum_k (b_k - a_k)$, elle est $\leq b-a$,
4. si $W \subset V$ alors sa longueur est majorée par celle de V,
5. la longueur d'une union finie disjointe $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ est la somme $|V_1| + \cdots + |V_n|$,
6. et $|V| = |V \setminus F|$ pour tout V ouvert et F fini.

Bien sûr cela va dans la direction des idées de la théorie de la mesure des ensembles, mais on est resté ici à un niveau nettement plus élémentaire. Par exemple, on n'a même pas mentionné que le point 5 valait aussi pour les unions dénombrables, et on n'a pas non plus indiqué que $|V| \leq |V_1| + |V_2|$ lorsque $V \subset V_1 \cup V_2$. En effet il n'est pas nécessaire de le savoir pour la preuve du Théorème 1.

En sus de cette notion de longueur d'un ouvert, le point central de la preuve proposée est :

Lemme 2. *Si les ouverts* U_n *de* $]a,b[$ *vérifient :* $\exists \varepsilon > 0\ \forall n\ |U_n| \geq \varepsilon$*, alors il existe* $x \in]a,b[$ *qui appartient à une infinité des* U_n*.*

Une fois que l'on dispose de la théorie de la mesure, on peut montrer bien mieux : les x qui appartiennent à une infinité des U_n forment un ensemble de mesure au moins ε. Mais le Lemme 2 nous suffit, et la difficulté de sa démonstration n'excède pas de beaucoup ce que l'on fait ou devrait faire habituellement en première année : Bolzano-Weierstrass, bornes supérieures, théorème des valeurs intermédiaires, théorème du maximum, uniforme continuité des fonctions continues sur un segment, etc...

2 Longueur d'un ouvert

Je suppose connues les notions de base sur les intervalles, ainsi que celle d'une partie ouverte $V \subset]0,1[$: pour tout $x \in V$, il existe $\eta > 0$ avec $]x-\eta, x+\eta[\subset V$. Une union quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection de deux ouverts est un ouvert.

On peut définir une relation d'équivalence sur V (non vide) par $x \sim y$ si le segment d'extrémités x et y est entièrement inclus dans V. Soit I une classe d'équivalence. Si $x < y$ sont dans I alors $[x, y] \subset \mathrm{I}$ et un petit raisonnement, en posant $a = \inf \mathrm{I}$, $b = \sup \mathrm{I}$ montre que I est l'un de $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, ou $]a, b[$. Comme V est ouvert, il est facile de voir que I doit l'être aussi et donc I est de la forme $]a, b[$.

Supposons donnés N intervalles ouverts disjoints $]a_j, b_j[$ dans $]0, 1[$. On peut les supposer énumérés de la gauche vers la droite donc

$$0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_\mathrm{N} < b_\mathrm{N} \leq 1$$

Ainsi

$$\sum_j (b_j - a_j) \leq (b_1 - a_1) + (a_2 - b_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_\mathrm{N} - a_\mathrm{N}) = b_\mathrm{N} - a_1 \leq 1 \tag{1}$$

Considérons un ouvert V et les classes d'équivalence définies plus haut qui sont des intervalles ouverts. S'il n'y en a qu'un nombre fini N de la forme $]a_j, b_j[$, on pose

$$|\mathrm{V}| = \sum_j (b_j - a_j)$$

En particulier $|\emptyset| = 0$.

S'il y a un nombre infini de classes d'équivalence $\mathrm{I} =]a, b[$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il ne peut y en avoir qu'un nombre fini avec $b - a \geq \varepsilon$. En effet, à cause de (1) il ne peut pas y en avoir plus que le plus grand entier inférieur à $1/\varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1$, puis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., on voit que l'ensemble des couples (a, b), $a < b$, associés aux classes d'équivalence est une union dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable. Ainsi, on peut énumérer les I (par exemple, I_1 sera le plus à gauche parmi les plus longs, etc...) d'où $\mathrm{V} = \bigcup_{k \geq 1} \mathrm{I}_k = \bigcup_{k \geq 1}]a_k, b_k[$. Soit $l_k = b_k - a_k$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_k l_k$ sont toutes majorées par 1, donc la série est convergente. On sait que sa somme ne dépend pas de l'ordre des termes. Cette somme est appelée la **longueur** de V et est notée $|\mathrm{V}|$.

On a donc $|\mathrm{V}| \leq 1$. Plus généralement, en revenant comme ci-dessus à des unions finies d'intervalles, si $\mathrm{V} \subset]a, b[$ alors $|\mathrm{V}| \leq b - a$. Supposons que $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ soit un autre ouvert. Toute composante de W est nécessairement incluse dans une unique composante de V car l'équivalence au sens de W implique celle au sens de V. Écrivons V comme l'union finie ou infinie de ses composantes : $\mathrm{V} = \cup_k \mathrm{I}_k = \cup_k]a_k, b_k[$. On peut pour chaque k, énumérer les composantes $\mathrm{J}_{k,l}$ de W qui sont dans I_k (il peut n'y en avoir qu'un nombre fini L voire zéro, on posera $J_{k,l} = \emptyset$ pour $l > L$). On sait que la série itérée $\sum_k(\sum_l |J_{k,l}|)$ a comme valeur le supremum de toutes les sommes finies de termes $|J_{k,l}|$, et cette valeur est $|W|$. Donc $|W| = \sum_k |W \cap I_k|$. Donc $|W| \leq |V|$, car comme on a vu plus haut $|W \cap I_k| \leq b_k - a_k$.

Un raisonnement du même type montre que si V est l'union disjointe de n ouverts $V_1, \ldots, V_n$, on a $|V| = |V_1| + \cdots + |V_n|$. Il suffira de noter (pour $1 \leq k \leq n$) $L_{k,l}$, $l \geq 1$, les longueurs des intervalles composant V_k (avec la même convention que $L_{k,l} = 0$ si l est plus grand que le nombre de ces composantes de V_k). La somme $\sum_k \sum_l L_{k,l}$ est à la fois $|V_1| + \cdots + |V_n|$ et aussi le supremum des sommes finies de termes $L_{k,l}$, c'est-à-dire $|V|$.

Finalement par récurrence sur #F on établit sans peine que $|V| = |V \setminus F|$ pour tout V ouvert et F fini.

3 Preuve du Lemme 2

Rappelons l'énoncé : *Si les ouverts U_n de $]a,b[$ vérifient : $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n$, $|U_n| \geq \varepsilon$, alors il existe $x \in]a,b[$ qui appartient à une infinité des U_n.*

Preuve : soit $V_n = \bigcup_{m \geq n} U_m$. On a $V_n \supset V_{n+1}$ et il s'agit de montrer $\bigcap_n V_n \neq \emptyset$. Comme $U_n \subset V_n$ on a $\varepsilon \leq |V_n|$.

On peut écrire V_1 comme une union disjointe $\cup_{1\leq k\leq K}\ ]x_k, y_k[\ \cup W$ avec $|W| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$. Soit x'_k légèrement supérieur à x_k et y'_k légèrement inférieur à y_k. Posons $T = \cup_{1\leq k\leq K}]x'_k, y'_k[$ et modifions W en lui ajoutant les $]x_k, x'_k[$, et les $]y'_k, y_k[$. On peut faire cela en imposant $|W| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. On a une union disjointe $V_1 = T \cup W \cup F$ avec F un ensemble fini. Ainsi, pour tout $n \geq 2$ on a $|V_n| = |V_n \cap T| + |V_n \cap W| \leq |V_n \cap T| + \frac{1}{2}\varepsilon$ donc $|V_n \cap T| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Posons $a_k = x'_k$, $b_k = y'_k$, et pour $1 \leq k \leq K$, $l_n^{(k)} = \left|V_n \cap\ ]a_k, b_k[\ \right|$. Pour chaque k la suite $l_n^{(k)}$ est décroissante, soit $l^{(k)}$ sa limite.

$$\left(\forall n \quad \sum_{1\leq k\leq K} l_n^{(k)} = |V_n \cap T| \geq \frac{1}{2}\varepsilon\right) \implies \sum_{1\leq k\leq K} l^{(k)} \geq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Donc l'un des $l^{(k)}$ est strictement positif. Renumérotant au besoin, on peut supposer que $k = 1$ convient ; posons $\varepsilon_1 = l^{(1)}$. On a donc :

$$\exists a_1, b_1 \in]a,b[\ \exists \varepsilon_1 > 0 : \quad a_1 < b_1, \quad [a_1, b_1] \subset V_1 \quad \text{et} \quad \left(\forall n > 1 \quad \left|\,]a_1, b_1[\ \cap V_n\right| \geq \varepsilon_1\right)$$

Supposons connus par récurrence $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_1$, ainsi que $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_n > 0$, avec

$$[a_n, b_n] \subset V_n \qquad \text{et } \forall m > n \qquad \big| \,]a_n, b_n[\, \cap V_m \big| \geq \varepsilon_n > 0$$

La construction précédente peut être répétée à l'identique avec a_n jouant le rôle de a, b_n celui de b et $V_{n+1} \cap \,]a_n, b_n[$ celui de V_1. Elle donne l'existence de $a_{n+1} < b_{n+1}$, et $\varepsilon_{n+1} > 0$, convenables.

Si l'on pose alors $x = \lim a_n$, on a $x \in [a_n, b_n]$ donc $x \in V_n = \bigcup_{m \geq n} U_m$ pour tout n. Par conséquent il existe une infinité d'indices avec $x \in U_m$.

4 Convergence bornée vers une fonction Riemann intégrable

Théorème 3. *Soit $a < b$ et soit (f_n) une suite de fonctions R-intégrables sur $[a, b]$ convergeant simplement sur $]a, b[$ vers une fonction f, elle aussi R-intégrable sur $[a, b]$. On suppose de plus qu'il existe une constante C telle que $|f_n(x)| \leq C$ pour tout n et tout $x \in]a, b[$. Alors*

$$\lim \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

On peut légèrement alléger les hypothèses en autorisant un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_N$, en lesquels on n'exige ni $\lim f_n(x_j) = f(x_j)$ ni $|f_n(x_j)| \leq C$. Il suffira en effet de redéfinir les $f_n(x_j)$ et $f(x_j)$ comme valant 0 ce qui ne change ni l'intégrabilité ni les intégrales.

Les différences avec le théorème de Lebesgue[1] sont principalement :

1. l'intégrabilité de la fonction limite f fait ici partie des hypothèses ; mais même sans cette hypothèse nous montrerons plus loin que $\lim \int_a^b f_n(x)\, dx$ existe (même si f n'est pas R-intégrable ; elle le sera au sens de Lebesgue !).
2. la convergence simple est exigée partout, ou à l'exception d'un nombre fini de points, tandis que Lebesgue autorise un ensemble exceptionnel de mesure nulle (ce qui ne coûte rien puisqu'on peut modifier une fonction sur un ensemble de mesure nulle sans altérer ni l'intégrabilité ni la valeur de son intégrale au sens de Lebesgue).

1. Pour un exposé des théorèmes de la convergence dominée et monotone dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on pourra consulter : http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeRiemannALebesgue.pdf

Preuve : On peut supposer $a = 0$ et $b = 1$. Et en remplaçant f_n par $|f_n - f|$, et C par son double, on se ramène au cas avec $f = 0$ et les f_n positives ou nulles. Puis en divisant par $\mathrm{C}+1$ on peut supposer $\mathrm{C} = 1$.

S'il est faux que $\lim \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une infinité d'indices n avec $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \varepsilon$. En passant à une suite extraite, on peut donc supposer que cela vaut pour tous les n. Pour chaque n on choisit une fonction en escalier φ_n avec $0 \leq \varphi_n \leq f_n$ et $\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \geq \frac{1}{2}\varepsilon$. Considérons une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_\mathrm{N} = 1$ adaptée à φ_n. Parmi les intervalles ouverts $\mathrm{I}_j =]x_{j-1}, x_j[$ il y a ceux sur lesquels la fonction constante φ_n est $\leq \frac{1}{4}\varepsilon$, et les autres, dont l'union sera notée U_n. On peut majorer $\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$ par $\frac{1}{4}\varepsilon + |\mathrm{U}_n|$, donc minorer $|\mathrm{U}_n|$ par $\frac{1}{4}\varepsilon$.

Par le Lemme 2, il existe un $x \in]0,1[$ qui appartient à une infinité de ces U_n et donc pour ces n, $\varphi_n(x) > \frac{1}{4}\varepsilon$, ainsi $\lim \varphi_n(x) = 0$ est contredit. Ce qui contredit $\lim f_n(x) = 0$. Le théorème 3 est démontré.

5 Énoncé renforcé

On peut aussi établir :

Théorème 4. *Soit $a < b$ et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$, telles que*

$$\exists \mathrm{C}\ \forall n \geq 1\ \forall x \in]a,b[\quad |f_n(x)| \leq \mathrm{C}\ ,$$

Si $f(x) = \lim f_n(x)$ existe pour tout $x \in]a,b[$, alors

$$\mathrm{L} = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx$$

existe (même si la fonction f n'est pas intégrable au sens de Riemann).

Preuve : si la suite $(\int_a^b f_n(x)\,dx)$ ne converge pas, elle n'est pas de Cauchy, donc il existe $\varepsilon > 0$ ainsi que $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ avec $\forall k \geq 1$, $\left|\int_a^b f_{n_k}(x)\,dx - \int_a^b f_{m_k}(x)\,dx\right| \geq \varepsilon$. En posant $g_k(x) = f_{n_k}(x) - f_{m_k}(x)$ on a donc $\varepsilon \leq \left|\int_a^b g_k(x)\,dx\right|$, et a fortiori $\varepsilon \leq \int_a^b |g_k(x)|\,dx$. On peut poursuivre la preuve comme précédemment : on choisit pour chaque k une fonction en escalier φ_k avec $0 \leq \varphi_k \leq |g_k|$ $(\leq 2\mathrm{C})$ et $\frac{1}{2}\varepsilon \leq \int_a^b \varphi_k(x)\,dx$. Puis on prend une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_\mathrm{N} = b$ adaptée à φ_k et on note U_k l'union des intervalles $]x_{j-1}, x_j[$ tels que la valeur (constante) de φ_k sur ces intervalles soit $> \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{b-a}$. Comme

$$\frac{1}{2}\varepsilon \leq \int_a^b \varphi_k(x)\,dx \leq \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{b-a}(b-a) + 2\mathrm{C}|\mathrm{U}_k| = \frac{1}{4}\varepsilon + 2\mathrm{C}|\mathrm{U}_k|$$

on a

$$\forall k \geq 1 \quad |\mathrm{U}_k| \geq \frac{1}{8\mathrm{C}}\varepsilon$$

On invoque alors le Lemme 2 et donc il existe un $x \in]a,b[$ qui appartient à une infinité des U_k. Ce x vérifie par conséquent $|f_{n_k}(x) - f_{m_k}(x)| \geq g_k(x) \geq \varphi_k(x) > \frac{1}{4}\varepsilon\frac{1}{b-a}$ pour une infinité de k, ce qui prouve que la suite $(f_n(x))$ n'est pas de Cauchy, et contredit l'hypothèse de l'existence de $\lim f_n(x)$. Fin de la preuve du théorème 4 et donc aussi du théorème 1.

Remarquons que si l'on trouve pour la même fonction f une autre suite de fonctions Riemann intégrables g_n avec $\lim g_n(x) = f(x)$ pour tout x de $]a,b[$, la convergence étant dominée ($\exists \mathrm{D}\ \forall n \geq 1\ \forall x \in]a,b[\ |g_n(x)| \leq \mathrm{D}$), alors :

$$\mathrm{L} = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim \int_a^b g_n(x)\,dx$$

En effet il suffit d'appliquer le Théorème à la suite $f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, \ldots$

6 Ouverts non intégrables au sens de Riemann

Toujours dans l'idée de préciser les contours de l'intégration au sens de Riemann, je montre dans cette section comment construire un ouvert $\mathrm{V} \subset]0,1[$ dont la fonction indicatrice $\mathbf{1}_\mathrm{V}(x)$ ($= 1$ si $x \in \mathrm{V}$, $= 0$ si $x \notin \mathrm{V}$), n'est pas intégrable au sens de Riemann. Pourtant, c'est une fonction qui semble bien innocente, et en tout cas il est clair que l'on doit pouvoir poser $\int_0^1 \mathbf{1}_\mathrm{V}(x)\,dx = |\mathrm{V}|$, puisque l'on sait ce qu'est la longueur de V. C'est précisément ce que l'intégration au sens de Lebesgue réussit à faire.

Dans cette section il me faut faire appel au théorème de Lebesgue (dont une version initiale avait déjà été donnée par Riemann !) qui dit qu'une fonction bornée est intégrable au sens de Riemann si et seulement si ses points de discontinuité forment un ensemble de mesure nulle (pour une démonstration, voir par exemple [1]). Notre exemple $\mathbf{1}_\mathrm{V}$ sera discontinue en tous les points du complémentaire $\mathrm{X} =]0,1[\setminus\mathrm{V}$ et comme la mesure de X est $1 - |\mathrm{V}|$ il suffira de s'assurer que $|\mathrm{V}| < 1$.

J'indiquerai même dans cette dernière étape comment ne pas faire référence à la mesure de X, quitte à allonger un peu la preuve. En effet il suffit, pour comprendre la preuve donnée dans [1] du théorème de Lebesgue, de savoir ce qu'est un ensemble de mesure nulle et qu'une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle et je souhaite rester au même niveau.

Voyons comment on peut procéder, sachant que V sera de la forme $V = \cup_{k\geq 1}]a_k, b_k[$. En un point x du complémentaire (dans $]0,1[$) on a $\mathbf{1}_V(x) = 0$. Compte tenu que $\mathbf{1}_V$ ne prend que les valeurs 0 et 1, la continuité de $\mathbf{1}_V$ au point x équivaut à l'existence de $\eta > 0$ avec $]x-\eta, x+\eta[\cap V = \emptyset$. Cela est impossible si V est dense dans $]0,1[$.

Il suffit donc de s'assurer que V contient tous les rationnels.[2] Pour cela considérons une énumération q_1, q_2, ..., des rationnels de $]0,1[$. On choisit $a_1 < b_1$ irrationnels avec $0 < a_1 < q_1 < b_1 < 1$ et tels que $b_1 - a_1 \leq \frac{1}{4}$. Puis on considère le plus petit indice n avec $q_n \notin [a_1, b_1]$. On choisit $a_2 < b_2$ irrationnels $0 < a_2 < q_n < b_2 < 1$ et tels que $b_2 - a_2 \leq \frac{1}{4^2}$ et de sorte que $[a_2, b_2] \cap [a_1, b_1] = \emptyset$. Puis on considère le plus petit indice n avec $q_n \notin [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$. Il existe car, par exemple, il existe des n avec $q_n < \min(a_1, a_2)$. On prend ensuite $a_3 < b_3$ irrationnels avec $0 < a_3 < q_n < b_3 < 1$ et $b_3 - a_3 \leq \frac{1}{4^3}$ et tels que $[a_3, b_3]$ ne rencontre pas $[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$. C'est possible car q_3 est dans le complémentaire de $[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$ et ce complémentaire est un ouvert (comme intersection de deux ouverts).

On peut ainsi continuer indéfiniment. Soit alors $V = \cup_{k\geq 1}]a_k, b_k[$. On a donc $|V| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{1}{3}$. Par construction V contient tous les rationnels, et par conséquent, comme indiqué plus haut, sa fonction indicatrice est discontinue en tout point x du complémentaire $X =]0,1[\setminus V$.

Le théorème de Lebesgue (et Riemann...) a donc comme conséquence que si $\mathbf{1}_V$ était intégrable au sens de Riemann, alors ce complémentaire X serait de mesure nulle, c'est-à-dire que l'on pourrait, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une collection finie ou infinie dénombrable d'ouverts $]c_n, d_n[$, $n \geq 1$, $0 \leq c_n < d_n \leq 1$, tels que $X \subset \cup_n]c_n, d_n[$ et $\sum_n (d_n - c_n) \leq \varepsilon$.[3]

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{3}$ et notons W l'ouvert $\cup_n]c_n, d_n[$ et soit aussi W_N l'union $\cup_{1\leq n\leq N}]c_n, d_n[$ (le cas avec W une union finie ne ferait que

2. une autre méthode est de construire un ensemble comme celui de Cantor, mais de mesure non nulle.

3. comme $[0,1] \setminus V$ est fermé, un raisonnement indiqué dans la preuve donnée en [1] du théorème de Lebesgue permettrait de prendre les intervalles $]c_n, d_n[$ disjoints et en nombre fini. On va faire sans.

simplifier la rédaction qui suit). Par l'inégalité $\mathbf{1}_{W_N} \le \sum_{1\le n\le N} \mathbf{1}_{]c_n,d_n[}$ de fonctions en escalier, on a $|W_N| \le \sum_{1\le n\le N}(d_n - c_n) \le \frac{1}{3}$.

De même, notons $V_N = \cup_{1\le k\le N}\ ]a_k, b_k[$. Alors $Z_N = V_N \cup W_N$ est une union finie d'intervalles ouverts, et il n'est pas difficile de montrer par récurrence que son écriture en une union disjointe d'intervalles ouverts n'en fait intervenir qu'un nombre fini. En utilisant alors à nouveau l'astuce $\mathbf{1}_{Z_N} \le \mathbf{1}_{V_N} + \mathbf{1}_{W_N}$ on a $|Z_N| \le |V_N| + |W_N| \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Si $Z_N =]e_1, f_1[\cup \dots \cup]e_m, f_m[$ avec $0 \le e_1 < f_1 \le e_2 < \dots < f_m \le 1$ on note $U_N =]0, e_1[\cup]f_1, e_2[\cup \dots \cup]f_m, 1[$, de sorte que $|U_N| = 1 - |Z_N| \ge \frac{1}{3}$.

Notons qu'un x qui est dans U_N n'est pas dans W_N et que si cela arrive pour une infinité de N alors il ne peut pas être dans l'union croissante $W = \cup_N W_N$. De même un x qui est dans U_N n'est pas dans V_N et si cela arrive pour une infinité de N alors il ne peut pas être dans $V = \cup_N V_N$. Un tel x n'est donc ni dans W, ni dans V. Mais $V \cup W =]0, 1[$. Donc il n'y a aucun tel x. Ceci contredit le Lemme 2, puisque $|U_N| \ge \frac{1}{3}$ pour tous les N.

On a donc achevé la démonstration que $\mathbf{1}_V$ n'est pas intégrable au sens de Riemann. Évidemment on serait allé beaucoup plus vite si on avait pu écrire $\mu(X) = \mu(]0, 1[\setminus V) = 1 - |V| > 0$. Mais cela nécessite plus que la simple notion d'ensemble de mesure nulle.

Références pour l'intégrale de Riemann, et pour la convergence dominée une fois connue la mesure de Lebesgue

[1] http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeRiemann.pdf

[2] http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeRiemannALebesgue.pdf