Matrices symétriques et valeurs propres

Jean-François Burnol, 23 mars 2011

Comme promis, juste un petit commentaire par rapport à l'étape cruciale où l'on prouve, sans utiliser les nombres complexes, que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire une matrice symétrique réelle) a toujours au moins une valeur propre réelle.

Prendre comme hypothèse de récurrence la seule existence d'une valeur propre réelle ne permet pas de construire aisément une preuve, donc comme dans la leçon présentée aujourd'hui on prend comme hypothèse de récurrence carrément la diagonalisabilité dans une base orthonormée (théorème de réduction). L'énoncé sur l'existence d'une valeur propre apparaît alors comme une étape pour faire passer de n à $n+1$ le théorème de réduction (l'autre élément étant la stabilité du complémentaire orthogonal d'un espace stable ; notez comment le vocabulaire des endomorphismes et des espaces vectoriels permet de formuler aisément des choses qui seraient un peu fastidieuses d'un point de vue uniquement matriciel).

Donc pour M maintenant dans $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbf{R})$, on a vu dans la leçon comment l'hypothèse de récurrence nous donne une certaine matrice orthogonale P qui après un calcul par blocs mène à la formule :

$$N := P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & d_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_n & & & d_n \end{pmatrix}$$

Les matrices N et M sont semblables et ont donc le même polynôme caractéristique. Je voudrais proposer de procéder à partir de là via un calcul de déterminant. Je veux une formule pour :

$$Q_{n+1}(X) := \begin{vmatrix} X-\alpha & -g_1 & \dots & -g_n \\ -g_1 & X-d_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -g_n & & & X-d_n \end{vmatrix}$$

On peut développer par rapport à la dernière ligne par exemple :

$$Q_{n+1}(X) = (X-d_n)Q_n(X) + (-1)^n(-g_n)\begin{vmatrix} -g_1 & \dots & \dots & -g_n \\ X-d_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & X-d_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

puis, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(X) &= (X-d_n)Q_n(X) + (-1)^n(-g_n)(-1)^{n-1}(-g_n)\prod_{1\le j<n}(X-d_j) \\ &= (X-d_n)Q_n(X) - g_n^2\prod_{1\le j<n}(X-d_j) \end{aligned}$$

Sans même pousser plus loin le calcul on peut dès maintenant observer que $Q_{n+1}(d_n) = -g_n^2\prod_{1\le j<n}(d_n-d_j)$. Si l'on a pris soin d'imposer $d_1 \le \dots \le d_n$, il en résulte $Q_{n+1}(d_n) \le 0$. S'il y a égalité alors d_n est valeur propre. Sinon $Q_{n+1}(d_n) < 0$ et comme $\lim_{t\to+\infty} Q_{n+1}(t) = +\infty$ il y a une valeur propre dans $]d_n, \infty[$, fin de l'étape. □

Si l'on veut on peut mener plus loin le calcul, en mettant notre dernière formule sous la forme :

$$\frac{Q_{n+1}(X)}{\prod\limits_{1\le j\le n}(X-d_j)} = \frac{Q_n(X)}{\prod\limits_{1\le j\le n-1}(X-d_j)} - \frac{g_n^2}{X-d_n}$$

Il en résulte clairement par récurrence

$$\frac{Q_{n+1}(X)}{\prod\limits_{1\le j\le n}(X-d_j)} = X - \alpha - \sum_{1\le j\le n}\frac{g_j^2}{X-d_j}$$

qui permet, lorsque les g_j sont tous non nuls et les d_j distincts de voir que les racines de Q_{n+1} sont distinctes, une dans chaque intervalle $]-\infty, d_1[$, $]d_1, d_2[, \dots,]d_n, \infty[$.

Lorsqu'il y des g_j nuls ou des coïncidences entre les d_j, la discussion est un peu plus subtile. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les éléments distincts de l'ensemble $\{d_1, \dots, d_n\}$ pour lesquels il existe l'un au moins des g_j correspondants non nul :

$$\frac{Q_{n+1}(X)}{\prod\limits_{1\le j\le n}(X-d_j)} = X - \alpha - \sum_{1\le k\le p}\frac{\mu_k}{X-\lambda_k}$$

avec $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ et $\mu_k > 0$. Il y a un cas extrême avec $p = 0$, c'est lorsque tous les g_j sont nuls.

Notons $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_q$ les d_j qui ne se retrouvent pas parmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, et soit pour $1 \leq k \leq q$, m_k le nombre de d_j égaux à λ_k, de sorte que $m_1 + \cdots + m_q = n$.

Si $k > p$ alors la formule ci-dessus prouve que λ_k est un zéro du polynôme Q_{n+1} de multiplicité au moins m_k. Par contre si $1 \leq k \leq p$ alors la formule montre que λ_k sera un zéro de multiplicité au moins $m_k - 1$ (et donc pas forcément un zéro si $m_k = 1$). Or la dérivée de la fonction rationnelle à droite du signe d'égalité est strictement positive donc cela donne exactement $p+1$ racines simples de cette fraction, distinctes des λ_k. Ce décompte nous donne une somme de multiplicités égale à $m_1+\cdots+m_q-p+p+1 = n+1$. Comme on ne peut pas obtenir plus on a trouvé tous les zéros. La multiplicité d'un λ_k avec $1 \leq k \leq p$ comme zéro est donc exactement $m_k - 1$. Il est difficile de dire la multiplicité exacte des autres car il peut y avoir des coïncidences entre les zéros trouvés entre ces λ_k et les λ_k avec $p + 1 \leq k \leq q$.

Ce qu'on peut dire en tout cas pour le plus grand des d_j, donc d_n c'est :

- soit il est parmi les λ_k, $1 \leq k \leq p$ et donc il existe exactement une racine de Q_{n+1} qui lui est supérieure, et c'est une racine simple,
- soit il n'est pas parmi eux, et donc il est lui-même racine de Q_{n+1} ; il peut alors, ou non, exister une autre racine qui lui serait strictement supérieure (et si elle existe elle est forcément simple).

Dans tous les cas il existe donc une racine de Q_{n+1}, c'est-à-dire une valeur propre de la matrice symétrique M, qui est supérieure ou égale à d_n, c'est-à-dire à toutes les valeurs propres de la forme quadratique q_M associée à M mais restreinte à un certain hyperplan de dimension n dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

On peut même ajouter d'après notre discussion que si la plus grande racine de Q_{n+1} est multiple alors nécessairement cette racine est aussi valeur propre pour toute restriction à un hyperplan quelconque, ce qui est clair puisqu'un espace vectoriel de dimension deux et un hyperplan ont toujours une intersection non triviale (lorsque l'on restreint la forme quadratique q associée à un endomorphisme ϕ à un espace F, l'endomorphisme de F associé à $q|_F$ est $P \circ \phi$ avec P la projection orthogonale sur F ; donc si $x \in F$ est vecteur propre de ϕ il est aussi vecteur propre de l'endomorphisme associé à $q|_F$).

De même la plus petite des valeurs propres de la restriction de q_M a un hyperplan quelconque est toujours au moins égale à la plus petite des valeurs propres sur l'espace tout entier.

Ces résultats se retrouvent via les formules dites de « minimax » pour les valeurs propres d'une matrice symétrique/forme quadratique.

Pour conclure, une inégalité utile qu'Hervé m'a rappelée et qui s'obtient par récurrence via le résultat de l'exercice 3 d'Isabelle : *si* M *est une matrice symétrique positive alors son déterminant est au plus égal au produit des éléments de sa diagonale.*

On peut démontrer le résultat en écrivant $M = N^2$ avec N symétrique positive. On a alors

$$m_{jj} = \sum_i n_{ji} n_{ij} = \sum_i (n_{ij})^2$$

Or l'inégalité de Hadamard pour la matrice N s'écrit

$$|\det(N)| \leq \prod_j \sqrt{\sum_i (n_{ij})^2} = \sqrt{\prod_j m_{jj}}$$

En élevant au carré on obtient bien

$$\det(M) \leq \prod_j m_{jj}$$

Il est également possible de prouver l'inégalité via une orthogonalisation à la Gram-Schmidt (ce qui est d'ailleurs plus ou moins la méthode canonique pour prouver l'inégalité de Hadamard… : voir à ce sujet http://jf.burnol.free.fr/agreggramhadamard.pdf).