Les limites d'une suite vérifiant $x_{n+m} \leqslant \max(x_n, x_m)$

Jean-François Burnol, 31 octobre 2011

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite (réelle ...) avec la condition du titre. On a $x_1 \geqslant x_n$ pour tout n donc la limite supérieure L_1 ne peut pas être $+\infty$. La limite inférieure L_0 peut être $-\infty$ (par exemple $x_n = -n$). Quitte à composer avec Arctg on pourrait, si l'on voulait, supposer la suite bornée ; on s'en dispensera, en se méfiant de choses comme $L_0 + \epsilon$, puisque $L_0 = -\infty$ est autorisé.

On va s'intéresser aux valeurs d'adhérence possibles (dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). On utilisera principalement la notation $f(n) = x_n$.

Si $L_0 = L_1$ la suite converge (ou tend vers $-\infty$), et l'on n'a pas grand chose à dire, si ce n'est $x_n \geqslant L_0 = L_1$ pour tout n, car $x_n \geqslant x_{kn}$ pour tout k.

Si $L_0 < L_1$, la même minoration $x_n \geqslant x_{kn}$ donne $x_n \geqslant L_0$ pour tout n. Soit maintenant $T > L_0$ et définissons :

$$I(T) = \{m, f(m) \leqslant T\} \tag{1}$$

Pour tout $N \geqslant 1$, l'ensemble $I(T) \cap \{m \geqslant N\}$ n'est pas vide. Énumérons (dans l'ordre, mais ce n'est pas important) :

$$I(T) = \{m_1, m_2, \dots\} \tag{2}$$

Soit $d_k = \mathrm{pgcd}(m_1, \dots, m_k)$. La suite d_k est décroissante et finit par se stabiliser en $d = d(T)$. Supposons $d = 1$. Alors il existe k avec $d_k = 1$ et par conséquent tout entier $m \gg 1$ est combinaison linéaire à coefficients positifs de $m_1, \dots, m_k$, et par conséquent tout entier $m \gg 1$ est dans $I(T)$. Alors $T \geqslant \limsup f(m) = L_1$.

Si l'on prend T avec $L_0 < T < L_1$, il y a donc nécessairement $d = d(T) > 1$. Par un raisonnement semblable à celui fait plus haut dans le cas $d = 1$, tout entier m divisible par d et suffisamment grand est dans $I(T)$. Par ailleurs tous les éléments de $I(T)$ sont divisibles par d. Soit a premier avec d, il n'est donc pas dans $I(T)$ et $f(a) > T$. De plus on peut choisir $m = Kd$ premier avec a, et tel que K (par exemple une puissance de d) soit suffisamment grand pour que m soit dans $I(T)$. Tout $n \gg 1$ est alors de la forme $n = ua + vm$ avec u et v strictement positifs, donc $f(n)$ minore $\max(f(a), f(m)) = f(a)$. On a donc :

$$(a, d) = 1 \implies f(a) \geqslant L_1 = \limsup f(n) \tag{3}$$

Par conséquent :

$$L_1 = \lim_{(a,d)=1} f(a) \tag{4}$$

Soit e un diviseur propre de d et supposons $(a, d) = e$. Remplaçons la suite $f(n)$ par la suite $y_n = f(en)$. En fait cela ne modifie pas la limite inférieure ; bien que nous n'ayons pas absolument besoin de l'établir à ce stade, faisons-le pour la commodité du raisonnement, comme conséquence du lemme suivant :

Lemme. $L_0 = \lim f(N!)$

Preuve. Tout n finit par devenir diviseur de $N!$. Donc $N \gg 1 \Rightarrow f(n) \geqslant f(N!)$. Donc $f(n) \geqslant \limsup f(N!) \geqslant \liminf f(N!) \geqslant L_0$. □

Le Lemme implique que $f(en)$ a la même limite inférieure que $f(n)$, puisque les $N!$ sont tous des multiples de e pour $N \gg 1$. Le nouvel ensemble $I(T)$ est obtenu de l'ancien en en divisant les éléments par e, d est remplacé par $d/e > 1$, et a par a/e qui est premier avec d/e. Le raisonnement fait ci-dessus donne donc ici :

$$(a, d) = e < d \implies f(a) \geqslant \limsup f(en) \tag{5}$$

et ainsi l'existence de la limite :

$$\lim_{(a,d)=e} f(a) = \limsup f(en) \tag{6}$$

Comme les entiers a en question ne sont pas divisibles par d, ces limites sont toutes au moins égales à T.

Surtout nous voyons que les indices non-divisibles par d admettent une partition finie en des indices de suites extraites chacune convergente. Les limites de ces sous-suites (les limsup $f(en)$, pour $e \mid d$, $e < d$) donnent donc toutes les valeurs d'adhérence possibles des suites extraites avec des indices non-divisibles par d. Et les $f(dn)$ sont pour $n \gg 1$ majorés par T. On peut donc affirmer :

Proposition. *Pour tout $T > L_0$ il n'y a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence supérieures à T (et $+\infty$ n'en fait pas partie).*

Dans le cas où il n'y a au total qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence, on peut donc choisir T suffisamment proche de L_0 de manière à ce qu'il n'y ait aucune valeur d'adhérence autre que L_0 inférieure ou égale à T. Avec $d = d(T)$ on aura par conséquent une unique valeur d'adhérence possible pour les $f(dn)$ et donc la limite inférieure sera la limite des $f(dn)$.

Pour continuer la discussion je suppose d'abord pour fixer les idées qu'il y a un nombre infini de valeurs d'adhérence (en particulier $L_1 > -\infty$). Il est donc possible de les énumérer :

$$L_1 > L_2 > L_3 > \cdots \to L_0 \tag{7}$$

Si l'on choisit $T_1 = \frac{L_1+L_2}{2}$, et que l'on note d_1 l'entier associé à $I(T_1)$, la seule valeur d'adhérence possible pour les $f(n)$ avec n non divisible par d_1 est L_1. Par conséquent :

$$L_1 = \lim_{d_1 \nmid n} f(n) = \limsup f(n) \tag{8}$$

De même avec $T_2 = \frac{L_2+L_3}{2}$, et d_2 l'entier associé à $I(T_2)$. Il est un multiple de d_1 puisque $I(T_2) \subset I(T_1)$. Il ne peut pas être égal à d_1 car sinon les multiples de d_1

suffisamment grands vérifieraient $f(n) \leqslant \frac{L_2+L_3}{2}$ donc L_2 ne pourrait pas être valeur d'adhérence (car les non-multiples de d_1 eux font $f(n) \to L_1$). Les $f(n)$ avec n divisible par d_1 mais pas par d_2 ont comme unique valeur d'adhérence possible L_2. Ainsi :

$$L_2 = \lim_{\substack{d_1 \mid n \\ d_2 \nmid n}} f(n) = \limsup f(d_1 n) \tag{9}$$

En itérant on obtient au final, avec d_j pour $j \geqslant 1$ le pgcd des indices avec $f(n) \leqslant \frac{L_j+L_{j+1}}{2}$ (et par convention $d_0 = 1$), une chaîne strictement croissante au sens de la divisibilité $d_0 = 1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \dots$ et :

$$L_j = \lim_{\substack{d_{j-1} \mid n \\ d_j \nmid n}} f(n) = \limsup f(d_{j-1} n) \tag{10}$$

S'il y a seulement un nombre total fini de valeurs d'adhérence, il faut distinguer le cas $L_1 = -\infty$ du cas où il y a des valeurs d'adhérence finies $L_1 > L_2 > \cdots > L_r > L_0$; dans ce dernier cas on prend T_r n'importe où dans l'intervalle $]L_0, L_r[$. On obtient une chaîne finie $d_0 = 1 \mid d_1 \mid \cdots \mid d_r$ (si aucune valeur d'adhérence finie n'existe, on convient $r = 0$, $d_0 = 1$), et

$$\liminf f(n) = \lim f(d_r n) \tag{11}$$

Dans le cas infini au contraire, les indices avec $f(n) \leqslant \frac{L_j+L_{j+1}}{2}$ $(> L_0)$ sont tous multiples de d_j, et comme $d_j \to \infty$ il n'y a aucun moyen de forger avec des indices en progression arithmétique une suite extraite de $(f(n))_{n \geqslant 1}$ de limite L_0.

Soit maintenant $a \in \mathbb{Z}$ et supposons que a est divisible par d_{j-1} mais pas par d_j. Alors c'est aussi le cas des $a + N!$ lorsque $N \gg 1$. Par conséquent la suite (définie pour $N \gg 1$) $f(a + N!)$ a une limite $g(a)$ égale à L_j pour $a \in d_{j-1}\mathbb{Z} \setminus d_j\mathbb{Z}$. Pour $a = 0$, on a déjà vu que $f(N!)$ tend vers L_0 (que l'on pourrait peut-être dorénavant noter L_∞). Résumons (cas infini, pour fixer les idées) :

$$g(0) = \lim f(N!) = \liminf f(n) = L_0 \tag{12}$$
$$g(1) = \lim f(1 + N!) = \limsup f(n) = L_1 \tag{13}$$
$$g(a) = \lim f(a + N!) = \limsup f(d_j n) = L_{j+1} \qquad (a \in d_j\mathbb{Z} \setminus d_{j+1}\mathbb{Z}) \tag{14}$$
$$L_1 > L_2 > \cdots > L_j \to L_0 \tag{15}$$

Les valeurs prises par $g(a)$ sont donc précisément les valeurs d'adhérence de la suite originelle $f(n)$ et $g(a + b) \leqslant \max(g(a), g(b))$, car la valeur de $g(a)$ détecte la position de a dans la chaîne décroissante de sous-groupes $\mathbb{Z} \supset d_1\mathbb{Z} \supset d_2\mathbb{Z} \supset \cdots$.

De plus on a déjà vu précédemment pour $a \geqslant 1$ (sans peut-être l'écrire en toutes lettres) que si $d_{j-1} \mid a$ et $d_j \nmid a$ alors $f(a) \geqslant L_j$, donc, $f(a) \geqslant g(a)$. On peut aussi le retrouver par $\max(f(a), f(N!)) \geqslant f(a + N!)$ et $f(a + N!) \to g(a)$, $f(N!) \to L_0$, $f(a) \geqslant L_0$.

Ainsi dans le cas infini aucun $n \geqslant 1$ ne peut vérifier $f(n) = L_0$ tandis que c'est possible (mais pas obligatoire) dans le cas avec un nombre fini de valeurs d'adhérence.

Une autre approche

Voici maintenant une approche retravaillée a posteriori pour aller plus vite, au prix de l'intelligibilité.

On voit tout de suite que $L_1 = \limsup x_n$ est majoré par x_1. De même $L(m) = \limsup x_{mn}$ est majoré par x_m. S'il existe m avec $L(m) < L_1$ alors il y a au moins deux valeurs d'adhérence. Et la réciproque vaut, puisque s'il y a une autre valeur d'adhérence que L_1 on peut trouver $x_m < L_1$ et a fortiori $L(m) < L_1$.

Plaçons nous donc dans ce cas et considérons l'ensemble I des m tels que $L(m) < L_1$. On note d le pgcd des éléments de I. Il est réalisable sous la forme $d = \mathrm{pgcd}(m_1, \ldots, m_t)$. Quitte à multiplier les m_i par de grands premiers distincts, on peut toujours supposer $\max_{1\leqslant i\leqslant t} x_{m_i} = X < L_1$. Tout entier $n \gg 1$ divisible par d est une combinaison linéaire positive des m_i et donc $x_n \leqslant X < L_1$. Ainsi $L(d) \leqslant X < L_1$ et d est dans I qui est donc $I = \{kd, k \geqslant 1\}$. Nécessairement $d > 1$ et on pose $L_2 = L(d)$. On a $L_2 < L_1$.

Si a n'est pas divisible par d, il n'est pas dans I et en particulier $x_a \geqslant L_1$. Par conséquent $L_1 = \lim_{d\nmid a} x_a$. On note aussi au passage que $L_1 = L(a)$ pour $d \nmid a$. La limite supérieure L_1 est isolée parmi les valeurs d'adhérence, et L_2 est la plus grande valeur d'adhérence inférieure à L_1.

On pose $d_1 = d$, on remplace la suite x_n par la suite $x_{d_1 n}$ et on itère tant que cela est possible, c'est-à-dire tant qu'il subsiste au moins deux valeurs d'adhérence. En procédant ainsi on reconstitue nos résultats précédents.

Les premiers pas

Un point de départ possible est de constater que puisque n et $n+1$ sont premiers entre eux, tout entier $m \gg 1$ est de la forme $m = un + v(n+1)$ avec $u, v \geqslant 1$, donc $x_m \leqslant y_n = \max(x_n, x_{n+1})$. Donc $\limsup x_m \leqslant y_n$. Donc la suite (y_n) converge et a pour limite $L_1 = \limsup x_n$. On cherche alors à comprendre suivant les valeurs de n si $y_n = x_n$ ou $y_n = x_{n+1}$, ce qui finit par faire s'intéresser aux n avec $x_n \leqslant T$ et à partir de là on construit les résultats précédents.

Un résultat très classique

Si u_n est une suite réelle sous-additive ($u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$), alors un résultat très classique est que $\lim \frac{u_n}{n}$ existe (dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).

En posant $x_n = \frac{u_n}{n}$, on a $x_{n+m} \leqslant \frac{n}{n+m} x_n + \frac{m}{n+m} x_m \leqslant \max(x_n, x_m)$, donc on retrouve notre situation. Cependant, il vaut mieux l'oublier et traiter le problème de la suite sous-additive directement :

Fixons N et faisons les divisions euclidiennes $n = qN + r$, $q = q(n)$, $r = r(n)$. On a $u_n \leqslant q u_N + u_r$. Or $\frac{q}{n} \to \frac{1}{N}$, $\frac{u_r}{n} \to 0$, donc $\limsup \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_N}{N}$. Par conséquent $\limsup \frac{u_n}{n} \leqslant \liminf \frac{u_n}{n}$ d'où le résultat (comme $u_n \leqslant n u_1$ la limite ne peut pas être $+\infty$).