Formules de Taylor

Jean-François Burnol, 22 septembre 2009

Inutile de préciser (curieuse expression, car auto-contradictoire !) que les preuves proposées ici sont loin d'être les uniques manières de montrer les théorèmes en question. C'est juste qu'elles me plaisent en ce moment ! D'ailleurs en réalité il faudrait passer du temps sur les aspects historiques. On trouvera des informations dans « L'analyse au fil de l'histoire », Hairer-Wanner, Springer, collection Scopos.

La formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbf{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. La première étape (la plus importante à faire passer pédagogiquement, mais « triviale » du point de vue de la preuve) est de remarquer que le polynôme $T_n(f)(x) = \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$ a les mêmes dérivées que f au point a jusqu'à l'ordre n inclus. Donc la fonction de x, $g(x) = f(x) - T_n(f)(x)$ vérifie $g^{(j)}(a) = 0$, $0 \le j \le n$. On prendra $n \ge 1$. Par la règle de l'Hospital appliquée successivement

$$\lim \frac{g(x)}{\frac{(x-a)^n}{n!}} = \lim \frac{g'(x)}{\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1!}} = \cdots = \lim \frac{g^{(n-1)}(x)}{x-a}$$

sous réserve que cette dernière limite existe, et en effet comme $g^{(n-1)}(a) = 0$, cette limite existe et vaut $g^{(n)}(a) = 0$. Donc $f(x) = T_n(f)(x) + o((x-a)^n)$, ce qui est la formule de Taylor-Young.

La formule de Taylor-Lagrange

Cette fois-ci mon outil sera le deuxième théorème des accroissements finis, appliqué à la fraction :

$$\frac{f(b) - \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}}{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} ,$$

où nous considérons numérateur et dénominateur comme **fonctions de a**. Comme hypothèse on aura donc besoin que $f^{(n)}(y)$ existe et soit continue sur le segment d'extrémités a et b,[1] et que $f^{(n+1)}(y)$ existe à l'intérieur, car ces hypothèses permettent d'affirmer la continuité du numérateur sur le segment allant jusqu'à b et de le dériver à l'intérieur du segment (comme fonction de a). Pour ceci posons $g(y) = \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(y)\frac{(b-y)^k}{k!}$, il vient :

$$g'(y) = \sum_{0\le k\le n} f^{(k+1)}(y)\frac{(b-y)^k}{k!} - \sum_{1\le k\le n} f^{(k)}(y)\frac{(b-y)^{k-1}}{(k-1)!} = f^{(n+1)}(y)\frac{(b-y)^n}{n!}$$

Les hypothèses faites font de g une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (ou $[b, a]$), dérivable à l'intérieur, et le deuxième théorème des accroissements finis donne alors :

$$\exists c \qquad \frac{f(b) - \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}}{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{-f^{(n+1)}(c)\frac{(b-c)^n}{n!}}{-\frac{(b-c)^n}{n!}} = f^{(n+1)}(c) ,$$

1. un examen plus attentif montre qu'il suffit de supposer $\lim_{x\to b}(x-b)^k f^{(k)}(x) = 0$ pour $1 \le k \le n$, il n'est pas stricto sensu nécessaire de supposer l'existence des dérivées $f^{(k)}(b)$, $1 \le k \le n$.

c'est-à-dire la formule de Taylor avec reste de Lagrange :

$$\exists c \in \,]a, b[\text{ (resp. }]b, a[) \qquad f(b) = \sum_{0 \le k \le n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Rappel des hypothèses : f est de classe C^n sur $[a, b]$ (resp. $[b, a]$), et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$.

La formule de Taylor-Cauchy

C'est une variante de celle de Taylor-Lagrange, valable sous les mêmes hypothèses. On reprend notre fonction $g(y) = \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(y) \frac{(b-y)^k}{k!}$ et on lui applique le (premier) théorème des accroissements finis. Il vient :

$$\exists c \qquad f(b) - \sum_{0 \le k \le n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} = g(b) - g(a) = (b-a)g'(c) = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-c)^n (b-a)}{n!}$$

Exercice : utilisez la formule de Taylor avec reste de Cauchy pour prouver $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ pour $-1 < x < 1$. Montrez que le reste de Lagrange ne permet pas de le faire lorsque $-1 < x < -\frac{1}{2}$.

La formule de Taylor-Schlömilch

Elle a un paramètre supplémentaire, un entier p compris entre 0 et n. Pour $p = 0$ c'est Lagrange, pour $p = n$ c'est Cauchy. Sous les mêmes hypothèses, on applique le deuxième théorème des accroissements finis au quotient $\frac{f(b) - \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}}{\frac{(b-a)^{n+1-p}}{(n+1-p)!}}$, numérateur et dénominateur vus comme fonctions de a. Cela donne

$$\exists c \qquad \frac{f(b) - \sum_{0\le k\le n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}}{\frac{(b-a)^{n+1-p}}{(n+1-p)!}} = \frac{-f^{(n+1)}(c) \frac{(b-c)^n}{n!}}{-\frac{(b-c)^{n-p}}{(n-p!}} = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-c)^p (n-p)!}{n!} \, ,$$

$$\exists c \in \,]a, b[\text{ (resp. }]b, a[) \qquad f(b) = \sum_{0 \le k \le n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-c)^p (b-a)^{n+1-p}}{(n+1-p)\, n!}$$

La formule de Taylor avec reste intégral de Laplace

Il suffit de reprendre

$$g(y) = \sum_{0 \le k \le n} f^{(k)}(y) \frac{(b-y)^k}{k!} \qquad g'(y) = f^{(n+1)}(y) \frac{(b-y)^n}{n!}$$

Si f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$) on aura g de classe C^1 sur $[a, b]$ donc :

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(y) \, dy$$

ce qui n'est autre que la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{0 \le k \le n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} \, dt$$

L'hypothèse usuelle suffisante est donc : f de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ (resp. $[b, a]$).

Il suffit pour la validité que f soit de classe C^n sur $[a, b[$ (resp. $]b, a]$), que $\lim_{x\to b} (b-x)^k f^{(k)}(x) = 0$ pour $1 \le k \le n$, que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$, et que $f^{(n+1)}(t)(b-t)^n$ (arbitrairement définie en a et b) soit intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a, b]$.