Théorème de Tauber pour les intégrales et les séries

Jean-François Burnol, 9 octobre 2009

Tauber pour les intégrales

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes sur $[0, +\infty[$, intégrable sur tout segment. Je rappelle que l'intégrale « impropre » $\int_0^\infty f(t)\,dt$ est définie comme étant la limite $\lim_{X\to\infty} \int_0^X f(t)\,dt$ si celle-ci existe. On dit que l'intégrale converge si la limite existe et est finie. Dans une feuille précédente nous avons vu que dans ce cas les intégrales de Laplace :

$$L(a) = \int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt\ ,$$

convergent et définissent une fonction continue de a pour $a \geq 0$. Ainsi :

$$\lim_{a\to 0^+} \int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt \text{ existe (et vaut } \int_0^\infty f(t)\,dt) \tag{1}$$

Une autre conséquence de la convergence de $\int_0^\infty f(t)\,dt$ est :

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X tf(t)\,dt = 0 \tag{2}$$

Vous devriez y réfléchir avant de lire plus loin. Le théorème suivant est assez remarquable :

Théorème 1 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes sur $[0, +\infty[$, intégrable sur tout segment. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge,*
2. *$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X tf(t)\,dt = 0$ et $\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt$ admet une limite finie pour $a \to 0^+$.*

Note : on montre que si $\int_0^X tf(t)\,dt = o(X)$ alors $\int_0^\infty f(t)e^{-at}\,dt$ existe pour tout $a > 0$.

Je ne sais pas à qui l'on attribue ce théorème. Son analogue (que nous énoncerons plus loin) pour les séries est lui bien identifié historiquement, il complète le théorème d'Abel, et il est dû à Tauber.

Vérifions (2) lorsque $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge. Je donne deux preuves.

Première preuve : soit $Y > 0$ quelconque et soit $X > Y$, par le deuxième théorème de la moyenne, on a :

$$\left|\int_Y^X tf(t)\,dt\right| \leq X \sup_{Y\leq c\leq X} \left|\int_c^X f(t)\,dt\right| \leq 2X \sup_{c\geq Y}\left|\int_c^\infty f(t)\,dt\right|$$

$$\implies \frac{1}{X}\left|\int_0^X tf(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{X}\left|\int_0^Y tf(t)\,dt\right| + 2\sup_{c\geq Y}\left|\int_c^\infty f(t)\,dt\right|$$

On prend Y suffisamment grand pour que le sup à droite soit au plus ϵ, et alors pour $X > Y$ encore plus grand le premier terme de la majoration sera lui aussi au plus ϵ, d'où $\epsilon + 2\epsilon$, terminé.

Deuxième preuve de $\int_0^X tf(t)\,dt = o(X)$. On utilise Fubini (si f était continue on ferait une intégration par parties),

$$\int_0^X tf(t)\,dt = \int_0^X (\int_0^t du) f(t)\,dt = \iint_{0\leq u\leq t\leq X} f(t)\,dtdu = \int_0^X (\int_u^X f(t)\,dt)\,du$$

En notant $g(u) = \int_u^\infty f(t)\,dt$ (c'est une fonction continue), il vient :

$$\frac{1}{X}\int_0^X tf(t)\,dt = -g(X) + \frac{1}{X}\int_0^X g(u)\,du\ ,$$

et les deux termes à droite tendent vers 0 pour $X \to \infty$ (car $\lim_{u\to\infty} g(u) = 0$ et, pour l'intégrale, par un analogue du théorème de Cesàro sur les suites convergentes).

Nous avons donc montré l'implication du Théorème, passons à la réciproque.

Le cas $f(t) = o(\frac{1}{t})$

On remarque en passant que sous cette hypothèse $\int_0^X tf(t)\,dt = o(X)$ est automatique. Écrivons :

$$L(\frac{1}{X}) = J(X) + K(X) \qquad J(X) = \int_0^X f(t)e^{-t/X}\,dt \qquad K(X) = \int_X^\infty f(t)e^{-t/X}\,dt$$

On peut écrire pour $X \to \infty$, sous l'hypothèse $f(t) = o(\frac{1}{t})$:

$$K(X) = o\left(\int_X^\infty \frac{1}{t}e^{-t/X}\,dt\right) = o\left(\int_1^\infty \frac{1}{t}e^{-t}\,dt\right) = o(1)$$

Puis, en rappelant que $1 + x \leq e^x$, donc $0 \leq 1 - e^{-t/X} \leq \frac{1}{X}t$:

$$\left|\int_0^X f(t)\,dt - J(X)\right| \leq \frac{1}{X}\int_0^X t|f(t)|\,dt$$

Comme $t|f(t)| \to 0$ pour $t \to \infty$, le terme de droite tend vers zéro pour $X \to \infty$. Au final, on a prouvé l'implication :

$$f(t) = o(\frac{1}{t}) \implies \lim_{X\to\infty}\left|\int_0^X f(t)\,dt - \int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{X}}\,dt\right| = 0$$

Par conséquent $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge si et seulement si la transformée de Laplace $L(a)$ a une limite (finie) pour $a \to 0^+$.

Le cas général

On peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec f_1 égale à f sur $[0, 1]$ et nulle ailleurs. Pour f_1 on sait que sa transformée de Laplace est une fonction continue de $a \geq 0$, donc finalement toutes les hypothèses sont transférées sur f_2, on peut aussi bien supposer $f = f_2$ ce que nous ferons dorénavant. Par des intégrations par parties astucieuses on va translater le problème de la fonction d'origine f à la fonction

$$F(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t u\, f(u)\, du$$

Notez-bien que l'hypothèse faite sur f est $\int_0^t u\, f(u)\, du = o(t)$, donc $F(t) = o(\frac{1}{t})$, et du coup, si on peut montrer que le problème pour f se ramène à celui pour F on aura fini.

Par « intégration par parties » (Fubini, en fait, justifiez...), on a :

$$\int_0^X f(t)\, dt = \int_0^X t f(t) \frac{1}{t}\, dt = XF(X) + \int_0^X F(t)\, dt$$

Comme $XF(X) \to 0$, la convergence de $\int_0^\infty f(t)\, dt$ équivaut à celle de $\int_0^\infty F(t)\, dt$. C'est le premier point. Recommençons avec les exponentielles en plus :

$$\int_0^X f(t) e^{-at}\, dt = \int_0^X t f(t) \frac{e^{-at}}{t}\, dt = XF(X)e^{-aX} + \int_0^X F(t)e^{-at}\, dt + \int_0^X F(t) a t e^{-at}\, dt$$

Comme $F(t) = o(\frac{1}{t})$ les deux intégrales à droite convergent pour $X \to \infty$, et ainsi l'existence de $\int_0^\infty f(t)e^{-at}\, dt$ pour $a > 0$ découle de $\int_0^X t\, f(t)\, dt = o(X)$. Puis :

$$\forall a > 0 \quad \int_0^\infty f(t)e^{-at}\, dt = \int_0^\infty F(t)e^{-at}\, dt + \int_0^\infty F(t) a t e^{-at}\, dt$$

On majore le dernier terme :

$$\left| \int_0^\infty F(t) a t e^{-at}\, dt \right| \leq a \int_0^T |F(t)| t\, dt + \sup_{t \geq T} |tF(t)| \int_T^\infty a e^{-at}\, dt \leq a \int_0^T |F(t)| t\, dt + \sup_{t \geq T} |tF(t)|$$

On choisit T tel que $\sup_{t \geq T} |tF(t)| \leq \epsilon$. Pour a suffisamment petit le premier terme du majorant sera lui-aussi au plus ϵ, soit 2ϵ en tout. Donc : $\lim_{a \to 0^+} \int_0^\infty F(t) a t e^{-at}\, dt = 0$ et par conséquent : $\lim_{a \to 0^+} \int_0^\infty F(t)e^{-at}\, dt$ existe (et vaut $\lim_{a \to 0^+} \int_0^\infty f(t)e^{-at}\, dt$). C'est le deuxième point de la réduction. La démonstration du Théorème est complète.

Le théorème de Tauber pour les séries

Il s'agit du théorème suivant :

Théorème 2 *Soit a_n, $n \in \mathbf{N}$, des nombres complexes. Il y a équivalence entre :*

1. *la série $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge,*
2. *on a $\sum_{0 \leq n \leq N} n a_n = o(N)$ et la limite $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ existe.*

Note : on prouve que $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ si $\sum_{0 \leq n \leq N} n a_n = o(N)$.

Rappelons que le théorème d'Abel est que si $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge et vaut A alors la limite $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ existe et vaut A. Le théorème de Tauber donne la condition $\sum_{0 \leq n \leq N} n a_n = o(N)$ permettant la réciproque au théorème d'Abel. En particulier si $a_n = o(\frac{1}{n})$ l'existence de $\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ implique l'existence de $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

Je vais montrer ce dernier résultat, mais laisse pour l'instant aux intrépides la preuve du théorème complet, il s'agirait pour eux d'imiter pour les séries la réduction que nous avons faite pour les intégrales.

Donc ici $na_n \to 0$ et on considère $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui converge nécessairement pour $|x| < 1$. On écrit :

$$A(1 - \frac{1}{N}) = \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - \frac{1}{N})^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (1 - \frac{1}{N})^n$$

Le dernier terme est petit o de $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{N})^n$ que l'on majore par $\frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}(1 - \frac{1}{N})^n$ lui même inférieur à $\frac{1}{N} \times N = 1$. Donc le dernier terme tend vers zéro pour $N \to \infty$. Si l'on utilise maintenant la majoration élémentaire $1 + nx \leq (1 + x)^n$ valable en tout cas pour $1 + x \geq 0$, on a $0 \leq 1 - (1 - \frac{1}{N})^n \leq \frac{n}{N}$, d'où :

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - \frac{1}{N})^n \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n| \ ,$$

qui tend vers zéro par moyenne de Cesàro appliqué à na_n. Finalement nous venons de prouver que sous l'hypothèse $na_n = o(1)$ on a :

$$\lim_{N \to \infty} \left| A(1 - \frac{1}{N}) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| = 0$$

Par conséquent si $\lim_{x \to 1} A(x)$ existe, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Le théorème de Littlewood

Littlewood a démontré le théorème célèbre suivant :

Théorème 3 *Si $a_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ et si $A = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ existe alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (et vaut A).*

Et la version pour les intégrales vaut aussi :

Théorème 4 *Si $f(t) = \mathcal{O}(\frac{1}{t})$ et si $I = \lim_{a \to 0^+} \int_0^{\infty} f(t)e^{-at}\, dt$ existe alors $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ converge (et vaut I).*

Les preuves connues sont d'un niveau de difficulté nettement plus élevé que sous la condition $o(\frac{1}{n})$ (ou $f(t) = o(\frac{1}{t})$). C'est Hardy qui a introduit les grands $\mathcal{O}$ dans ces histoires. En effet il s'est posé la question : *si les sommes partielles d'une série $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k$ convergent en moyenne de Cesàro* ($\lim \frac{S_0 + \cdots + S_n}{n+1} = l$)*, est-il vrai que* $\lim S_n = l$ *?* Tauber avait précédemment étudié la question avec la sommation d'Abel pour la série à la place de la limite en moyenne de Cesàro, et avait obtenu comme nous l'avons vu un résultat positif sous l'hypothèse l'hypothèse $na_n \to 0$. Dans le cas regardé par Hardy, la condition $na_n \to 0$ fonctionne et c'est très (trop) facile. Alors Hardy montra que cela marchait sous l'hypothèse plus faible $n|a_n| \leq C$. Puis Littlewood établit le Théorème 3 ci-dessus, celui que Tauber avait en version « petit o ». Hardy et Littlewood prouvèrent ensuite des théorèmes de plus en plus sophistiqués, auxquels ils donnèrent le nom collectif de « théorèmes taubériens ». D'autres riches développements suivirent tout au long du vingtième siècle.

Le Théorème de Tauber pour les séries (suite)

Pour être complet, donnons le reste de la démonstration du Théorème 2. Je vais m'efforcer de coller de près à nos techniques utilisées pour les intégrales. Pour nous échauffer commençons par redémontrer le Théorème d'Abel. Soit donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente, posons $\sigma_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$ de sorte que $a_n = \sigma_n - \sigma_{n+1}$. Alors, pour $N \leq M$, et $0 \leq x \leq 1$:

$$\sum_{n=N}^{M} a_n x^n = \sum_{n=N}^{M} (\sigma_n - \sigma_{n+1}) x^n = \sigma_N x^N + \sum_{n=N+1}^{M} \sigma_n (x^n - x^{n-1}) - \sigma_{M+1} x^M$$

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n x^n \right| \leq (\sup_{N \leq n \leq M+1} |\sigma_n|)(x^N + \sum_{n=N+1}^{M} (x^{n-1} - x^n) + x^M) \leq 2x^N \sup_{N \leq n} |\sigma_n| \leq 2 \sup_{N \leq n} |\sigma_n|$$

Le critère de Cauchy pour la convergence de $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est donc vérifié [1] et en prenant $M \to \infty$ on a de plus :

$$0 \leq x \leq 1 \implies \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n x^n \right| \leq 2 \sup_{n \geq N} |\sigma_n| \ ,$$

d'où la convergence uniforme sur $[0,1]$ des sommes partielles $\sum_{0 \leq n < N} a_n x^n$ vers $A(x)$. Par conséquent A est une fonction continue de x aussi au point 1 d'où le théorème d'Abel.

Ensuite, montrons que la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implique que la suite $n a_n$ converge en moyenne de Cesàro vers zéro. Avec $\sigma_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m$ comme précédemment :

$$\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n + n \sigma_{n+1}$$

$$\implies \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n} = \frac{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n}{n} - \sigma_{n+1}$$

Comme $\lim \sigma_n = 0$ les deux termes à droite tendent vers zéro (par Cesàro), donc on a le résultat voulu.

À ce stade l'implication dans le Théorème 2 est établie, montrons la réciproque. Le cas $a_n = o(1/n)$ a été traité et on va s'y ramener. Définissons :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k$$

Faisons une sommation d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N} n a_n \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n-1}) \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} b_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + b_N \frac{x^{N+1}}{N+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n x^n}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n x^n (1-x)}{n+1} + \frac{b_N}{N+1} x^{N+1}$$

1. évidemment, comme $\lim a_n = 0$, on savait déjà que $A(x)$ était convergente pour $|x| < 1$, l'important c'est que nos estimées montrent que le critère de Cauchy vaut uniformément en x sur $[0,1]$.

Comme par hypothèse on a $b_n = o(n)$, le dernier terme tend vers zéro pour $|x| \leq 1$ et les deux séries de droite convergent pour $|x| < 1$. Donc la série entière $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ a rayon de convergence au moins 1. Et :

$$0 \leq x < 1 \implies A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n(n+1)} + (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n+1}$$

On peut majorer le dernier terme par

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n| x^n}{n+1} \leq (1-x) \sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{n+1} + (1-x)(\sup_{n>N} \frac{|b_n|}{n+1}) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leq (1-x) K_N + \sup_{n>N} \frac{|b_n|}{n+1}$$

En prenant N suffisamment grand $\sup_{n>N} \frac{|b_n|}{n+1}$ est au plus ϵ, puis en prenant $1-x$ suffisamment petit le premier est aussi au plus ϵ, donc 2ϵ avec $\epsilon > 0$ arbitraire. Ainsi :

$$\lim_{x \to 1^-} \left| A(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n(n+1)} \right| = 0$$

Par conséquent si $\lim_{x \to 1^-} A(x)$ existe alors il en est de même pour $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n(n+1)}$ (avec la même valeur). Et les coefficients $c_n = \frac{b_n}{n(n+1)}$ de cette série vérifient $c_n = o(1/n)$. Donc par la preuve faite dans ce cas on peut affirmer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n(n+1)}$$

est convergente. Et si l'on revient en arrière, on a l'identité, en $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n(n+1)} + \frac{b_N}{N+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n(n+1)} + o(1)$$

En conclusion la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, ce qui achève la preuve du théorème de Tauber.