Un Lemme de suite extraite

Jean-François Burnol, 15 octobre 2009

1 Le Lemme

Il est utile de connaître le lemme suivant, lorsque l'on navigue dans les méandres des équivalences entre diverses propriétés essentielles de l'ensemble des nombres réels.

De toute suite de nombres réels on peut extraire, soit une suite croissante, soit une suite décroissante.

2 Preuve

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Soit $P \subset \mathbf{N}$ défini par :

$$P = \{n \in \mathbf{N} \mid m \geq n \implies x_m \geq x_n\}$$

Si P est infini, on l'énumère $p_1 < p_2 < \cdots < p_j < \ldots$. Par construction $x_{p_k} \geq x_{p_j}$ pour $k \geq j$ on a donc une suite extraite croissante.

Si P est fini, c'est qu'il existe un N tel que pour tout $n \geq N$ il existe un $m > n$ avec $x_m < x_n$. On pose $n_1 = N$ et supposant connus $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, on choisit, puisque $n_k \geq N$, $n_{k+1} > n_k$ avec $x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$. Pour fixer les idées on peut prendre le plus petit indice possible avec ces propriétés. De cette façon on a une suite extraite (strictement) décroissante.

3 Application à Bolzano-Weierstrass

Évidemment le lemme a comme corollaire le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites bornées, à partir du moment où l'on admet que toute suite croissante majorée ou décroissante minorée converge !

Mieux, au risque de brouiller les cerveaux fragiles, j'attire l'attention sur le fait que l'on a par le Lemme la propriété de Bolzano-Weierstrass, même sans le mot « bornée » !... en effet même si la suite n'est pas bornée le Lemme nous dit qu'elle a une suite extraite monotone, donc convergente... dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Donc, de toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite ayant une limite, celle-ci étant éventuellement infinie.

On peut aussi faire joujou avec $\limsup x_n$ pour retrouver ce dernier résultat, car la limite supérieure existe toujours (dans $\overline{\mathbf{R}}$!) et est toujours la limite d'une suite extraite. Évidemment la construction de la limite supérieure utilise à fond l'existence d'une borne supérieure (ou inférieure) pour toute partie non vide de $\mathbf{R}$.

Notez qu'avec $d(x, y) = |\operatorname{Arctg}(x) - \operatorname{Arctg}(y)|$ on munit $\mathbf{R}$ puis $\overline{\mathbf{R}}$ d'une distance qui fait de ce dernier un espace métrique isométrique à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ muni de la distance usuelle, donc un compact, l'honneur est sauf.