Encadrements de $\dfrac{\sin(x)}{x}$

Jean-François Burnol, 7 janvier 2011

Dans un texte que le Professeur Queffélec vous a distribué début décembre il indiquait comment montrer

$$0 < x < \pi \implies 0 < \frac{\sin(x)}{x} < e^{-\frac{x^2}{6}} \tag{1}$$

à partir du produit infini. Monsieur Queffélec demandait une démonstration avec des moyens plus élémentaires. Le but de cette petite fiche est de répondre à cette question, avec une méthode que l'on peut généraliser, mais son étude plus approfondie serait loin de demeurer « élémentaire » : au contraire, j'ai entrevu qu'il y avait sous-jacent au texte que je vous propose bien des notions avancées (approximants de Padé, polynômes orthogonaux, techniques de théorie de la transcendance, monodromie peut-être...). Je me contente ici d'à peu près le strict minimum.

Je signale au passage que les sommes partielles des séries trigonométriques se comportent comme si ces dernières étaient alternées, c'est-à-dire, pour $0 < x < \infty$, $\sin(x) < x$, $\sin(x) > x - \frac{1}{6}x^3$, $\sin(x) < x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, $\sin(x) > x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$, etc... et de même avec $\cos(x)$.

Tout d'abord, bien que cela n'aie pas été exactement mon cheminement initial, voyons comment on peut procéder si quelqu'un nous donne (1) et demande de le prouver. L'expression $\frac{\sin(x)}{x}\exp(\frac{x^2}{6})$ vaut 1 en $x = 0$ (et 0 en $x = \pi$), donc avec un peu de chance on va prouver (1) en montrant que $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}\exp(\frac{x^2}{6})$ est strictement décroissante. Il suffirait pour cela de prouver $g' < 0$, ou encore que la dérivée logarithmique g'/g est strictement négative sur l'intervalle considéré. D'où la question :

$$0 < x < \pi \overset{?}{\implies} \operatorname{ctg}(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x < 0 \tag{2}$$

Et nous pouvons écrire l'inégalité à prouver plus commodément sous la forme :

$$f(x) := (3 - x^2)\sin(x) - 3x\cos(x) > 0 \qquad (0 < x < \pi) \tag{3}$$

On a (on notera la factorisation astucieuse de x sans laquelle on tournerait en rond) :

$$f'(x) = -x^2\cos(x) + x\sin(x) = x(-x\cos(x) + \sin(x)) \tag{4}$$

$$\text{puis } (-x\cos(x) + \sin(x))' = x\sin(x) \tag{5}$$

La dernière équation montre que $-x\cos(x) + \sin(x)$, qui est nulle en $x = 0$, est strictement croissante, donc strictement positive, et l'avant-dernière équation montre alors que $f(x)$, qui est nulle en $x = 0$, est strictement croissante, donc elle aussi strictement positive. Nous avons ainsi établi (3), donc (2) et finalement (1). Au passage, par la décroissance de $\frac{\sin(x)}{x}\exp(\frac{x^2}{6})$ on peut noter :

$$0 < x < \frac{1}{2}\pi \implies \frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi^2 - 4x^2}{24}} < \frac{\sin(x)}{x}, \tag{6}$$

ce qui améliore la traditionnelle minoration par $\frac{2}{\pi}$ (remarque : comme $\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi^2}{24}} = 0{,}960\,454\ldots$, on déduit de (6) l'encadrement $0{,}96 \cdot e^{-\frac{x^2}{6}} < \frac{\sin(x)}{x} < e^{-\frac{x^2}{6}}$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

On dégage de notre approche une méthode qui se généralise : partant de $\sin(x) > 0$, on multiplie par x et on intègre, puis on itère. À chaque étape on aura une expression $P(x)\sin(x) - Q(x)\cos(x)$ qui sera nulle à l'origine et de dérivée strictement positive (par hypothèse de récurrence) sur l'intervalle ouvert $]0,\pi[$, donc strictement positive. D'où une inégalité pour la fonction cotangente et par intégration pour la fonction sinus. On définit donc des polynômes par la récurrence :

$$P_{n+1}(x)\sin(x) - Q_{n+1}(x)\cos(x) = \int_0^x t(P_n(t)\sin(t) - Q_n(t)\cos(t))\,dt\ , \tag{7}$$

initialisée par $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$. Plus concrètement, si P, Q, A, B sont des polynômes réels, et $X = P + iQ$, $Y = A + iB$, la relation dans $\mathbf{C}[x]$

$$X + iX' = ix\,Y \tag{8}$$

équivaut à demander $(P\sin(x) - Q\cos(x))' = x\,A\sin(x) - x\,B\cos(x)$. Comme la dérivation est localement nilpotente dans les polynômes, pour tout Y donné, l'équation (8) a une unique solution (donnée par $ixY - i(ixY)' - (ixY)'' + i(ixY)''' + \cdots$), dont le degré est exactement celui de Y plus 1. Notons que $X(x) + iX'(x) = ixY(x) \implies X(-x) - i\frac{d}{dx}X(-x) = -ixY(-x)$, donc si X correspond à Y alors $\overline{X(-x)}$ correspond à $\overline{Y(-x)}$. Donc si la partie réelle de Y est paire et sa partie imaginaire est impaire, il en est de même pour X. Si l'on part de $X_0 = 1$ qui a cette propriété et que l'on définisse X_n par récurrence par $X_{n+1} + iX'_{n+1} = ixX_n$, alors la propriété sera préservée et donc avec $X_n = P_n + iQ_n$ le polynôme réel P_n sera pair et le polynôme réel Q_n sera impair. Du coup la quantité $P_n(x)\sin(x) - Q_n(x)\cos(x)$ sera impaire, nulle en zéro et l'équation (7) sera valable, l'intégration n'apportant pas de constante d'intégration. Voici le résultat de mes calculs : $X_0 = 1$, $X_1 = 1 + ix$, et

$$X_2 = 3 - x^2 + i3x \tag{9}$$
$$X_3 = 15 - 6x^2 + i(15x - x^3) \tag{10}$$
$$X_4 = 105 - 45x^2 + x^4 + i(105x - 10x^3) \tag{11}$$
$$X_5 = 945 - 420x^2 + 15x^4 + i(945x - 105x^3 + x^5) \tag{12}$$

Nous avons obtenu l'inégalité de Monsieur Queffélec à partir de (9). De X_3, c'est-à-dire de :

$$0 < x < \pi \implies (15 - 6x^2)\sin(x) - x(15 - x^2)\cos(x) > 0 \tag{13}$$

nous obtenons après un petit calcul que l'expression $\frac{\sin(x)}{x}(1 - \frac{x^2}{15})^{-\frac{5}{2}}$ a une dérivée logarithmique strictement négative d'où la majoration :

$$0 < x < \pi \implies \frac{\sin(x)}{x} < (1 - \frac{x^2}{15})^{\frac{5}{2}} \tag{14}$$

qui améliore le résultat cité par Monsieur Queffélec. On note au passage la minoration :

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \implies \frac{2}{\pi}\left(\frac{1 - \frac{1}{15}x^2}{1 - \frac{1}{60}\pi^2}\right)^{\frac{5}{2}} < \frac{\sin(x)}{x} \tag{15}$$

Comme $\frac{2}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{60})^{-\frac{5}{2}} = 0{,}997\,712\ldots$ l'approximation par $(1 - \frac{x^2}{15})^{\frac{5}{2}}$ est à mieux de $\frac{5}{2}$‰ près sur $]0, \frac{1}{2}\pi]$.

J'ai aussi calculé les inégalités venant de X_4 (la majoration sera $e^{-\frac{x^2}{20}}(1 - \frac{2x^2}{21})^{\frac{49}{40}}$) et de X_5, mais là le résultat devient franchement trop complexe pour que cela vaille la peine de le citer ici.