Théorème de Simson avec les nombres complexes

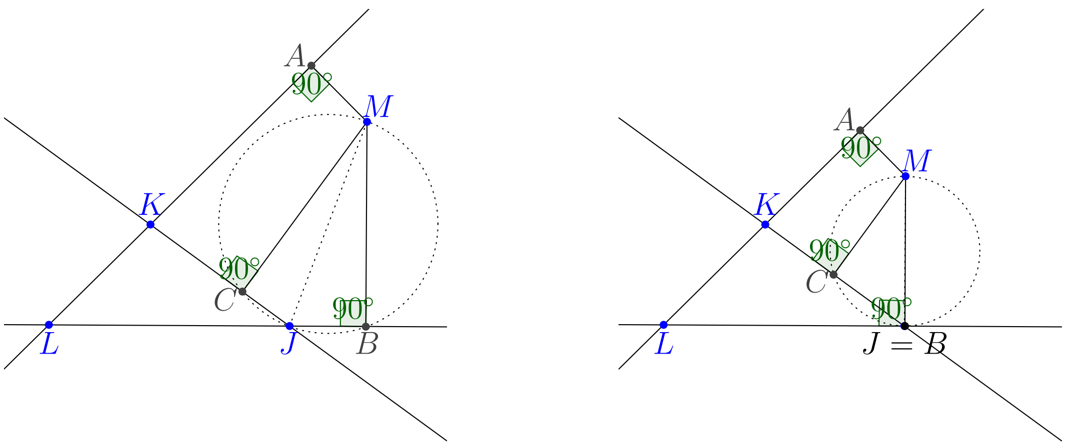
Jean-François Burnol, 10 décembre 2010

Je propose ici une réponse au « challenge » posé à la fin de la fiche précédente consacrée à la droite de Simson. Le but n'est pas seulement de prouver le théorème de Simson en utilisant les nombres complexes : car cela, nous avions déjà vu comment le faire assez simplement en utilisant les birapports. En fait c'est un prétexte pour voir comment les opérations standard : former une droite, projeter orthogonalement, etc... se traduisent avec les nombres complexes.

Prenons le problème dans son sens direct, et avec des projections orthogonales (on peut généraliser à des projections générales sous un angle α). On a donc, pour commencer, trois points J, K, L (je n'utilise pas la lettre I car je vais noter les affixes complexes par des lettres minuscules), formant un vrai triangle, et un quatrième point M (pas sur les droites (KL), (LJ), (JK)) dont nous notons (respectivement) A, B, C les projections orthogonales sur les droites (KL), (LJ), (JK). Il s'agit de prouver que A, B, C sont alignés si et seulement si J, K, L et M sont cocycliques.

Rappelons comment on peut prouver cela par des calculs de birapport (qui en fait sont une version algébrique de la poursuite des angles comme au début de notre fiche précédente). Le Théorème est un corollaire de l'affirmation :

$$\left(\frac{j-m}{k-m}\Big/\frac{j-l}{k-l}\right)\Big/\frac{a-c}{b-c} \in \mathbf{R}$$



Cas général et cas particulier.

Le cercle de diamètre JM passe par B et par C (en général $J \neq B$, $JB \perp BM$ et $J \neq C$, $JC \perp CM$; et si $J = C$ ou $J = B$ (ou exclusif) la conclusion est encore vraie). Donc $\frac{j-b}{j-m}/\frac{c-b}{c-m} \in \mathbf{R}$, donc (puisque J, B, L sont alignés) $\frac{j-l}{j-m}/\frac{c-b}{c-m} \in \mathbf{R}$ (attention on a multiplié par $\frac{j-l}{j-b}$ ce qui est illicite si $J = B$; mais dans ce cas $\frac{j-l}{j-m} \in i\mathbf{R}$ et aussi $\frac{c-b}{c-m} \in i\mathbf{R}$: voir la figure). De la même façon le cercle de diamètre KM passe par A et C, donc $\frac{k-a}{k-m}/\frac{c-a}{c-m} \in \mathbf{R}$ puis $\frac{k-l}{k-m}/\frac{c-a}{c-m} \in \mathbf{R}$. En divisant par l'expression précédente il vient : $\frac{(k-l)(j-m)}{(k-m)(j-l)}/\frac{c-a}{c-b} \in \mathbf{R}$, c.q.f.d.

Recommençons, toujours avec les complexes, et d'une manière plus complète et détaillée. Pour cela il nous faut tout d'abord savoir effectuer la projection orthogonale de M d'affixe m sur la droite passant par deux points d'affixes j et k par exemple. L'affixe a de la projection A est caractérisé par le fait que $\frac{a-m}{k-j}$ est imaginaire pur et que a est combinaison linéaire à coefficients réels de j et de k, ce que l'on peut exprimer en disant que $\frac{a-j}{k-j}$ est un nombre réel. On a donc deux relations entre a et $\overline{a}$:

$$\frac{a-m}{k-j} = -\frac{\overline{a}-\overline{m}}{\overline{k}-\overline{j}}$$
$$\frac{a-j}{k-j} = +\frac{\overline{a}-\overline{j}}{\overline{k}-\overline{j}}$$

En éliminant $\overline{a}$ on trouve une équation qui détermine a de manière unique :

$$\frac{\overline{k}-\overline{j}}{k-j}(2a-m-j) = \overline{m}-\overline{j}$$

En fait j'aurais mieux fait de convenir dès le départ que M était l'origine du plan complexe, autrement dit que $m = 0$, car on peut toujours se ramener à cela on remplaçant k par $k-m$, j par $j-m$ et a par $a-m$. C'est la chose à faire pour garder à l'équation une bonne organisation. Et nous obtenons donc :

$$(\overline{k}-\overline{j})a = \frac{1}{2}j(\overline{k}-\overline{j}) - \frac{1}{2}\overline{j}(k-j) = \frac{1}{2}(j\overline{k}-\overline{j}k) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} j & k \\ \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix}$$

Ceci est la formule lorsque l'on projette orthogonalement l'origine du plan sur la droite passant par les nombres complexes j et k. Et si l'on projette un $m \neq 0$ on remplace k par $k-m$, j par $j-m$ et a par $a-m$.

Remarquons au passage plusieurs choses : (1) la déterminant 2×2 est imaginaire pur, donc $\mathrm{d}(M, JK) = |a-m| = \frac{1}{|k-j|}\frac{\pm i}{2}\begin{vmatrix} j-m & k-m \\ \overline{j}-\overline{m} & \overline{k}-\overline{m} \end{vmatrix} = \frac{\pm\Im((j-m)(\overline{k}-\overline{m}))}{|k-j|}$ (d'où aussi une formule pour l'aire du triangle MJK, voir *infra*), (2) nous obtenons un critère pour que M ne soit pas sur la droite JK : c'est que le déterminant soit non nul. Et réciproquement un point M sera aligné avec J et K si et seulement si le déterminant est nul (remarquez que ce critère vaut aussi si $J = K$, car alors le déterminant est toujours nul et effectivement n'importe quel point est aligné avec $J = K$) , autrement dit on a trouvé l'équation de la droite passant par j et k, c'est $\begin{vmatrix} j-z & k-z \\ \overline{j}-\overline{z} & \overline{k}-\overline{z} \end{vmatrix} = 0$, ou encore $j\overline{k}-\overline{j}k + z(\overline{j}-\overline{k}) - \overline{z}(j-k) = 0$. À y regarder de plus près cette dernière équation s'écrit plus joliment sous la forme :

$$\begin{vmatrix} j-z & k-z \\ \overline{j}-\overline{z} & \overline{k}-\overline{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j & k \\ \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & z \\ \overline{k} & \overline{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & j \\ \overline{z} & \overline{j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & k & z \\ \overline{j} & \overline{k} & \overline{z} \end{vmatrix} = 0\ , \qquad (1)$$

ce qui est plutôt cool. Et la formule pour la projection orthogonale prend la forme sympathique générale :

$$a = m + \frac{1}{2(\overline{k}-\overline{j})}\left(\begin{vmatrix} j & k \\ \overline{j} & \overline{k}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & m \\ \overline{k} & \overline{m}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & j \\ \overline{m} & \overline{j}\end{vmatrix}\right) = m + \frac{1}{2(\overline{k}-\overline{j})}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & k & m \\ \overline{j} & \overline{k} & \overline{m}\end{vmatrix}$$

Si on y remplace $\frac{1}{2}$ par 1 on aura la formule pour le symétrique de M par rapport à la droite (JK). Je crois avoir lu que les images P, Q, R, par homothétie de centre M de rapport 2 des projetés A, B, C, définissent (en cas d'alignement) la « droite de Steiner ».

Petite pause : plus haut on a fait une remarque sur la valeur de l'aire du triangle MJK.

Théorème 1. *Si D, E, F sont trois points du plan complexe, l'aire (algébrique) du triangle DEF est*

$$\mathcal{A}(D,E,F) = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & e & f \\ \overline{d} & \overline{e} & \overline{f}\end{vmatrix}$$

Preuve. L'expression ne dépend (par manipulation de colonnes) que de $e-d$ et $f-d$, on peut y supposer $d=0$ et elle devient $\frac{i}{4}\begin{vmatrix} e & f \\ \overline{e} & \overline{f}\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\Im(e\overline{f})$. Il suffit d'écrire $e = x+iy$, $f = x'+iy'$ pour voir apparaître $\frac{1}{2}(xy'-yx')$, dont on sait que c'est l'aire du triangle OEF. En fait c'est même la meilleure définition que l'on puisse donner de l'aire d'un triangle ! (définition qui permet ensuite de montrer, en travaillant un peu tout de même, que si l'on découpe un grand triangle en petits triangles l'aire est additive...). Remarquons qu'avec cette formule comme point de départ on ré-obtient comme conséquence l'équation d'une droite (DE) (lorsque $D \neq E$) : car F est sur cette droite si et seulement si $\mathcal{A}(D,E,F) = 0$. □

Reprenons Simson qui se ramène donc par ce qui précède à l'énoncé suivant (peu digeste...) :

Théorème 2. *Trois nombres complexes j, k, l formant un vrai triangle, sont cocycliques avec m (pris en dehors des trois droites engendrées par j, k, l) si et seulement si les trois expressions*

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & l & m \\ \overline{k} & \overline{l} & \overline{m}\end{vmatrix}}{\overline{l}-\overline{k}}, \quad q = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & l & m \\ \overline{j} & \overline{l} & \overline{m}\end{vmatrix}}{\overline{l}-\overline{j}}, \quad r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & k & m \\ \overline{j} & \overline{k} & \overline{m}\end{vmatrix}}{\overline{k}-\overline{j}}, \tag{2}$$

sont, comme points du plan, alignés sur une même droite.

Pour la preuve du Théorème, on simplifiera en supposant maintenant définitivement $m = 0$. Donc :

$$p = \frac{\begin{vmatrix} k & l \\ \overline{k} & \overline{l}\end{vmatrix}}{\overline{l}-\overline{k}}, \quad q = \frac{\begin{vmatrix} l & j \\ \overline{l} & \overline{j}\end{vmatrix}}{\overline{j}-\overline{l}}, \quad r = \frac{\begin{vmatrix} j & k \\ \overline{j} & \overline{k}\end{vmatrix}}{\overline{k}-\overline{j}}\ . \tag{3}$$

Les trois expressions p, q, r sont des nombres complexes non nuls car par hypothèse $M = O$ n'est sur aucune des trois droites (KL), (LJ), (JK).

Nous avons plusieurs façons d'exprimer que trois points du plan complexe D, E, F, sont alignés :

1. $uD + vE + wF = 0$ pour u, v, w réels, non tous nuls, tels que $u + v + w = 0$,
2. $E = D$ ou le quotient $\frac{f-d}{e-d}$ est réel,
3. $\begin{vmatrix} d & e \\ \overline{d} & \overline{e} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ \overline{e} & \overline{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & d \\ \overline{f} & \overline{d} \end{vmatrix} = 0$ (par notre critère donné par l'équation 1),
4. (lorsque l'on sait qu'ils sont distincts) $\dfrac{\begin{vmatrix} d & e \\ \overline{d} & \overline{e} \end{vmatrix}}{\overline{e}-\overline{d}} = \dfrac{\begin{vmatrix} e & f \\ \overline{e} & \overline{f} \end{vmatrix}}{\overline{f}-\overline{e}} = \dfrac{\begin{vmatrix} f & d \\ \overline{f} & \overline{d} \end{vmatrix}}{\overline{d}-\overline{f}}$, qui dit que les projetés de O sur les trois droites (DE), (EF), (FD) coïncident,
5. ce sont les images par une affinité de trois points que l'on sait déjà alignés.

On sait que la cocyclicité de J, K, L avec $M = O$ équivaut au fait que les images J', K', L' par l'inversion dans le cercle unité soient alignées, ou encore que les points d'affixes $\alpha = j^{-1}$, $\beta = k^{-1}$, $\gamma = l^{-1}$ soient alignés (ce sont les symétriques de J', K', L' dans l'axe réel). Écrivons p en fonction de α, β, γ :

$$p = \frac{\begin{vmatrix} k & l \\ \overline{k} & \overline{l} \end{vmatrix}}{\overline{l} - \overline{k}} = \frac{kl\,\overline{kl}}{\overline{l} - \overline{k}} \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \overline{\gamma} & \overline{\beta} \end{vmatrix} = kl\, \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \overline{\gamma} & \overline{\beta} \end{vmatrix}}{\overline{\beta} - \overline{\gamma}} = \alpha\, jkl\, \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \overline{\gamma} & \overline{\beta} \end{vmatrix}}{\overline{\beta} - \overline{\gamma}} \tag{4}$$

De même

$$q = \beta\, jkl\, \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \end{vmatrix}}{\overline{\gamma} - \overline{\alpha}}, \qquad r = \gamma\, jkl\, \frac{\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{vmatrix}}{\overline{\alpha} - \overline{\beta}} \tag{5}$$

Si J, K, L sont cocycliques avec $M = O$, alors α, β, γ sont alignés, on leur applique la propriété (4) ci-dessus et les équations (4) et (5) montrent alors que p, q, r en sont les images par une similitude de centre $M = O$. Eux aussi sont donc alignés.

Pour aller dans l'autre sens, bon, le miracle c'est qu'on peut calculer j, k, l, à partir de p, q, r donnés par l'équation (3) et au lieu de faire semblant d'avoir un pouvoir de divination algébrique transcendante, avouons qu'on s'appuie sur la géométrie : $\frac{1}{2}p = a$ est le projeté de O sur la droite (KL) donc en particulier $\frac{l-a}{a}$ est imaginaire pur et de même $\frac{l-b}{b}$ est imaginaire pur. On met cela en équation comme au début de cette fiche, on élimine $\overline{l}$ et on obtient comme à la fin de la fiche précédente sur Simson :

$$l = 2ab \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \overline{a} & \overline{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \overline{a} & \overline{b} \end{vmatrix}} = pq \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & q \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}} \implies \frac{\begin{vmatrix} p & q \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}} = pq\gamma \implies \frac{\begin{vmatrix} p & q \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}} r = pqr\,\gamma \tag{6}$$

$$\text{de même : } \frac{\begin{vmatrix} q & r \\ \overline{q} & \overline{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \overline{q} & \overline{r} \end{vmatrix}} p = pqr\,\alpha \qquad \frac{\begin{vmatrix} r & p \\ \overline{r} & \overline{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \overline{r} & \overline{p} \end{vmatrix}} q = pqr\,\beta \tag{7}$$

Lorsque p, q, r sont alignés les fractions multipliant p, q, r, dans (6) et (7) sont égales par le critère d'alignement (4). Ainsi α, β, γ s'obtiennent à partir de p, q, r par une similitude de centre $M = O$. Ils sont donc alignés et par conséquent J, K, L sont cocycliques avec $M = O$.

Le billet aller et retour entre j, k, l et p, q, r est remarquable et mérite qu'on le récapitule. Nous sommes partis de j, k, l formant un vrai triangle et deux-à-deux linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$ (deux nombres complexes sont linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$ si et seulement si ils ne sont pas sur une même droite passant par l'origine). Nous avons construit p, q, r comme les symétriques de l'origine dans les droites, respectivement, (kl), (lj), (jk). Nous avons prouvé qu'ils sont donnés par les formules :

$$p = \frac{\begin{vmatrix} k & l \\ \overline{k} & \overline{l} \end{vmatrix}}{\overline{l} - \overline{k}}, \quad q = \frac{\begin{vmatrix} l & j \\ \overline{l} & \overline{j} \end{vmatrix}}{\overline{j} - \overline{l}}, \quad r = \frac{\begin{vmatrix} j & k \\ \overline{j} & \overline{k} \end{vmatrix}}{\overline{k} - \overline{j}} \,. \tag{8}$$

Si p et q (par exemple) étaient linéairement dépendants sur $\mathbf{R}$, ils seraient sur une même droite passant par l'origine, et les droites (kl) et (lj) seraient parallèles (donc identiques), ce qui est faux puisque j, k, l forment un vrai triangle. Donc p et q (ainsi que q et r, r et p) sont indépendants sur $\mathbf{R}$. En particulier p, q, r sont non nuls. Notons $p' = \overline{p}^{-1}$, $q' = \overline{q}^{-1}$, $r' = \overline{r}^{-1}$ les images de p, q, r par l'inversion dans le cercle unité. Ce sont les centres des cercles images par l'inversion des droites (kl), (lj), (jk). Eux aussi sont nécessairement deux-à-deux indépendants sur $\mathbf{R}$. Ils sont donnés par les formules :

$$p' = \frac{l-k}{\overline{k}l - k\overline{l}}, \quad q' = \frac{j-l}{\overline{l}j - l\overline{j}} \quad r' = \frac{k-j}{\overline{j}k - j\overline{k}} \,. \tag{9}$$

Nous avons aussi obtenu, en utilisant $(l - \frac{1}{2}p)/p \in i\mathbf{R}$, $(l - \frac{1}{2}q)/q \in i\mathbf{R}$ la formule

$$l = pq\frac{\overline{q} - \overline{p}}{p\overline{q} - \overline{p}q} = \frac{p' - q'}{\overline{q}'p' - q'\overline{p}'} = \frac{q' - p'}{\overline{p}'q' - p'\overline{q}'}$$

et on peut aussi y adjoindre

$$j = \frac{r' - q'}{\overline{q}'r' - q'\overline{r}'}, \quad k = \frac{p' - r'}{\overline{r}'p' - r'\overline{p}'}$$

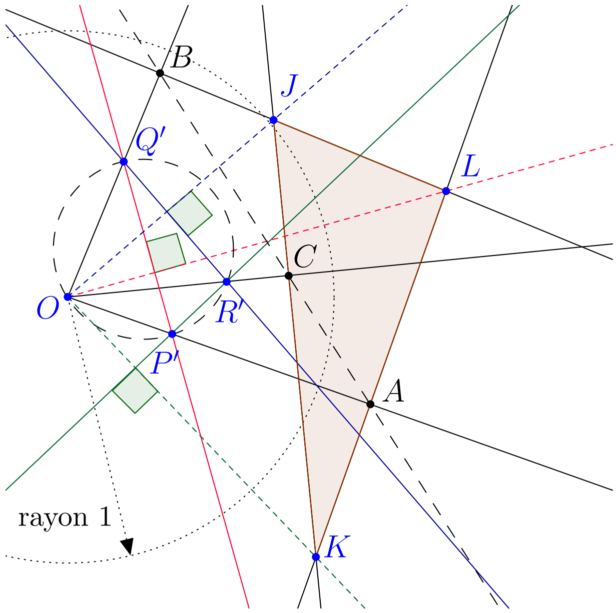
D'après le critère d'alignement (4), si p', q', et r' étaient alignés nous obtiendrions par ces formules $j = k = l$ ce qui est faux. Donc p', q', r' forment un vrai triangle. En conclusion :

Théorème 3. *Soient j, k, l formant un vrai triangle, tels que les droites (kl), (lj), (jk) ne passent pas par l'origine. Formons les centres p', q', r' des images de ces droites par l'inversion dans le cercle unité :*

$$p' = \frac{l-k}{\overline{k}l - k\overline{l}}, \quad q' = \frac{j-l}{\overline{l}j - l\overline{j}}, \quad r' = \frac{k-j}{\overline{j}k - j\overline{k}} \,. \tag{10}$$

Alors ils forment un vrai triangle et si on répète l'opération avec eux on reconstitue j, k, l. De plus le cercle passant par j, k, l passe par l'origine si et seulement si il en est de même pour le cercle passant par p', q', r'.

La situation est illustrée par la figure sur la page suivante, dont l'examen va nous suggérer une preuve géométrique.



Les points J, K, L étant donnés, on calcule P', Q', R', centres des cercles images des droites KL, LJ, JK dans l'inversion. Le cas présenté a J, K, L cocycliques avec O, et donc A, B, C alignés par le théorème de Simson et P', Q', R', O cocycliques.

La figure illustre le fait général que $OJ \perp Q'R'$, etc… : plus précisément, comme O, B, J, C sont cocycliques, les inversés $B' = 2Q'$, $C' = 2R'$ et J' sont alignés, donc la droite $(Q'R')$ coupe (OJ) en le milieu de $[OJ']$. De plus les angles droits sont préservés par une inversion et comme le cercle $OBJC$ fait un angle droit avec son diamètre OJ il en est de même de la droite $(Q'R')$ avec la droite (OJ). Donc si l'on prend le symétrique de O dans la droite $(Q'R')$ on trouve J', image de J par l'inversion. C'est ce qui est prouvé dans le texte de manière algébrique.

Je conclus cette fiche sur un dernier calcul relatif à la géométrie avec les nombres complexes. On se donne deux points distincts M et N et deux autres points distincts P et Q et on veut l'affixe z du point d'intersection des droites (MN) et (PQ) (s'il existe…). Les équations sont :

$$\frac{z-m}{m-n} = \frac{\overline{z}-\overline{m}}{\overline{m}-\overline{n}}$$
$$\frac{z-p}{p-q} = \frac{\overline{z}-\overline{p}}{\overline{p}-\overline{q}}$$

L'élimination de $\overline{z}$ mène à :

$$\left(\frac{\overline{m}-\overline{n}}{m-n} - \frac{\overline{p}-\overline{q}}{p-q}\right) z = \frac{n\overline{m}-\overline{n}m}{m-n} - \frac{q\overline{p}-\overline{q}p}{p-q}$$

Le terme entre parenthèses est nul si et seulement si les droites sont parallèles. Lorsque ce n'est pas le cas la formule donne l'affixe de l'unique point d'intersection.