Convergence simple nulle part uniforme

Jean-François Burnol, 23 septembre 2011

$$n \geqslant 1 \qquad x \in \mathbb{R} \qquad F_n(x) = \sum_{a=1}^{\infty} 2^{-a} \left(\sum_{-\infty<b<+\infty} \frac{2^{-|b|}}{1 + n^4(ax - b + \frac{1}{n})^2} \right)$$

1. Montrer que chaque F_n est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ (majorée par 3).
2. Montrer pour chaque x et chaque couple (a, b) fixé que le terme correspondant tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.
3. Montrer, en séparant un nombre fini de termes et en majorant les autres, que l'on a
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0}$$
4. Soient $\alpha < \beta$ arbitraires. En choisissant une fois pour toutes un nombre rationnel $q = \frac{b}{a}$ dans $]\alpha, \beta[$, puis en considérant les points $\frac{b}{a} - \frac{1}{na}$, montrer que pour n suffisamment grand on a $\sup_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} F_n(x) \geqslant 2^{-a-|b|}$.
5. En déduire que sur $[\alpha, \beta]$ la suite $(F_n(x))$ ne converge PAS uniformément vers zéro.

Pour résumer on a donc exhibé une suite de fonctions continues qui converge partout simplement mais nulle part uniformément vers la fonction identiquement nulle.