Des séries doubles non absolument convergentes

Jean-François Burnol, 11 octobre 2012

Voici déjà un premier exemple pour montrer que les deux sommes itérées peuvent exister en donnant deux résultats différents :

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

On voudrait maintenant une série double avec la même non-commutativité des séries itérées, mais dont le terme général $u(p, q)$ vérifie $\lim_{p+q\to\infty} u(p, q) = 0$. Il faut réfléchir plus. Voici une possibilité :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{10} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{9} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{8} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{7} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{1}{4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Si l'on somme d'abord les horizontales on obtient $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$. Si l'on somme d'abord les verticales on obtient un réarrangement $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$ qui converge aussi, mais vers $\frac{1}{2}\log 2$ (exercice classique ; c'est l'occasion de le faire !).

Je vous laisse décrire explicitement en symboles comment mon tableau précédent définit le terme général $u(p, q)$ de ma série double. D'ailleurs, je vous conseille de réfléchir à une construction générale qui pourra être appliquée à n'importe quelle série semi-convergente $\sum u_n$ pour laquelle on dispose d'une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ soit à nouveau convergente (de préférence vers une autre valeur...). À vous d'expliciter les notations et tout !

Ah, j'oubliais. Si je ne me suis pas trompé (et si je me suis trompé je modifierai mon pdf ni vu ni connu), dans mon exemple on peut aussi sommer par les (contre-) diagonales ($S = \sum_n \sum_{p+q=n} u(p, q)$) et cela donne une série convergente vers ... (suspense) : $\boxed{\frac{1}{2}\log\frac{14}{5}}$!

Et revenons au style plus élémentaire du premier exemple, mais cette fois avec la contrainte $\lim_{p+q\to\infty} u(p, q) = 0$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Avec $u(1, 1) = 1$ et, pour $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$,

$$u(p, q) = \begin{cases} -\frac{1}{q-1} & \frac{(q-1)(q-2)}{2} < p \leqslant \frac{q(q-1)}{2} \\ +\frac{1}{q} & \frac{q(q-1)}{2} < p \leqslant \frac{q(q+1)}{2} \end{cases}$$

Tous les autres sont nuls. Et pour la sommation par contre-diagonales ?