Chambouler la série de log(2)

Jean-François Burnol, 15 décembre 2011

La série

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est seulement semi-convergente et par le célèbre théorème de Riemann on peut donc en permuter les termes pour la faire converger vers n'importe quel x donné à l'avance. Comment le faire concrètement pour cette serie là ? c'est ce que je m'apprête à expliquer.

Je noterai $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et dirai que u_n est un terme pair si n est pair et impair si n est impair. Soit T_N la somme des N premiers termes impairs et U_N la somme des valeurs absolues des N premiers termes pairs. Ainsi

$$\begin{aligned}
T_N &= 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N-1} \\
U_N &= \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2N} \\
H_N &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \log N + \gamma + \mathcal{O}(N^{-1}) \\
T_N &= H_{2N} - \frac{1}{2}H_N = \frac{1}{2}\log N + \log 2 + \frac{1}{2}\gamma + \mathcal{O}(N^{-1}) \\
U_N &= \frac{1}{2}H_N = \frac{1}{2}\log N + \frac{1}{2}\gamma + \mathcal{O}(N^{-1})
\end{aligned}$$

Soit $p, q \geqslant 1$ deux entiers, que se passe-t-il si on forme une série en prenant les p premiers termes impairs puis les q premiers termes pairs puis les p termes impairs suivants puis les q termes pairs suivants. . . ? Cette série aura sa $p+q^e$ somme partielle égale à $T_p - U_q$, sa $2(p+q)^e$ somme partielle égale à $T_{2p} - U_{2q}$ sa $K(p+q)^e$ somme partielle égale à

$$S_{K(p+q)} = T_{Kp} - U_{Kq} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q} + \mathcal{O}(K^{-1})$$

Ces sommes partielles ont donc une limite, et comme le terme général de notre série tend vers zéro, et que nos blocs ont chacun $p+q$ termes, on en déduit que la série elle-même converge effectivement vers cette limite :

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{\sigma(m)} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

Il manque juste la description de la bijection σ de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$. [1] Clairement nous avons des blocs de $p+q$ termes, donc je vais donner une formule pour $\sigma((K-1)(p+q)+m)$, pour $K \geqslant 1$, et

1. Exercice sur les permutations de $\mathbb{N}$: on a toujours $\lim \sigma(n) = \infty$.

$m \in \{1, 2, \ldots, p+q\}$. Dans ce K^e bloc j'envoie les p premiers entiers (donc $m = 1, 2, \ldots, p$) sur les p nombres impairs du K^e bloc de p nombres impairs, d'où la formule :

$$\sigma((K-1)(p+q)+m) = 2((K-1)p+m-1)+1$$

De même j'envoie les q entiers suivants (donc $m = p+1, \ldots, p+q$) sur les q nombres pairs du K^e bloc de q nombres pairs, soit :

$$\sigma((K-1)(p+q)+m) = 2((K-1)q+m-p)$$

Cela définit σ et je laisse aux gens le soin de vérifier que c'est une bijection et qu'elle fait ce que l'on veut.

Exemples : pour obtenir la limite $\log 3$, on peut prendre $p = 9$, $q = 4$. Pour obtenir $\log 5$ on peut prendre $p = 25$, $q = 4$. Pour obtenir $\log 5 - \log 3$, on pourra prendre $p = 25$ et $q = 36$. Et pour obtenir 0 on pourra prendre $p = 1$ et $q = 4$:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\ & + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} \\ & + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{8n-6} + \frac{1}{8n-4} + \frac{1}{8n-2} + \frac{1}{8n} \right) \right) \end{aligned}$$

On peut obtenir pour limite tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \frac{1}{4}e^{2x}$ soit un nombre rationnel $\frac{p}{q}$. Cela forme déjà une partie dense, le Théorème de Riemann nous dit qu'on peut réaliser tous les x. Comment faire ? C'est bon, je vais le dire. Prendre des suites $\frac{r_n}{s_n}$ de limite α est une première idée mais nos blocs de taille $r_{n+1} - r_n + s_{n+1} - s_n$ risquent de ne pas avoir une longueur bornée si on s'y prend n'importe comment, et on pourrait avoir seulement la certitude de la convergence de certaines des sommes partielles (ou alors il faut en rajouter une couche et expliquer que l'on peut mettre les termes dans un ordre optimisé au sein des blocs). Donc, je vais prendre $s_N = N$. C'est-à-dire, je prends toujours un terme pair, et je regarde combien de termes impairs vont avec. Le choix qui s'impose est qu'avec les $s_N = N$ termes pairs, je veux avoir pris $r_N = [s_N\alpha]$ termes impairs (car alors $\lim \frac{r_N}{s_N} = \alpha$). On a $r_N \leqslant N\alpha < r_N + 1$ donc $r_N + \alpha \leqslant (N+1)\alpha < r_N + 1 + \alpha$ donc

$$r_N + [\alpha] \leqslant (N+1)\alpha < r_N + 1 + C$$

avec C le plus petit entier supérieur à α, $C = [\alpha]+1$ sauf si α est entier et alors $C = [\alpha] = \alpha$. Dans tous les cas r_{N+1} est soit $r_N + [\alpha]$ soit $r_N + C$, et en tout cas $0 \leqslant r_{N+1} - r_N \leqslant C$. Donc, en prenant comme $(N+1)^e$ bloc $\sum_{r_N < j \leqslant r_{N+1}} \frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2N+2}$ on construit une permutation de la série de départ qui converge vers x (même avant la formation des paquets car de longueurs bornées). Je laisse aux acharnés le soin d'écrire une formule pour le σ qui convient !

Remarque : si $x \leqslant \log 2$ on a $C = 1$ et donc chaque bloc de la méthode est constitué soit d'un impair (positif) et d'un pair (négatif), soit seulement d'un pair (négatif). Pour $x \geqslant \log 2$ on peut échanger les rôles et constituer avec $r_N = N$ et $s_N = [4Ne^{-2x}]$ une série avec des blocs chacun d'un impair et d'un pair ou seulement d'un impair.