Exemples de non-dérivabilité d'une réciproque

E. B. et J-F. B., 12 janvier 2011

Soit $1 = x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ une suite strictement décroissante de nombres réels positifs vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $\lim x_n = 0$,
2. $\lim x_{n+1}/x_n = 1$.

Par exemple, on peut prendre $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$ ou $x_n = \frac{1}{1+\ln n}$ (vous voyez, je deviens raisonnable, je n'ai pas écrit $\log n$). Pour visualiser graphiquement ce qui va suivre, plus la suite décroît lentement mieux c'est (je pense, à confirmer).

Sur l'intervalle $I_n =]x_{n+1}, x_n]$ je pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + x_n) \tag{1}$$

Ceci définit f sur $]0, 1]$ qui est l'union des intervalles (disjoints) I_n. Sur l'intervalle $J_n = I_n + 1$ je pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 1 + x_{n+1}) \tag{2}$$

Ceci définit f sur $]1, 2]$ et donc au total sur $]0, 2]$.

Finalement on prend $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$ pour $-2 \leqslant x < 0$.

> La fonction f est une bijection de $[-2, +2]$ sur $[-1, +1]$. De plus $f'(0)$ existe et vaut 1, mais la bijection réciproque f^{-1} n'est même pas continue en $y = f(0)$, donc encore moins dérivable en ce point.

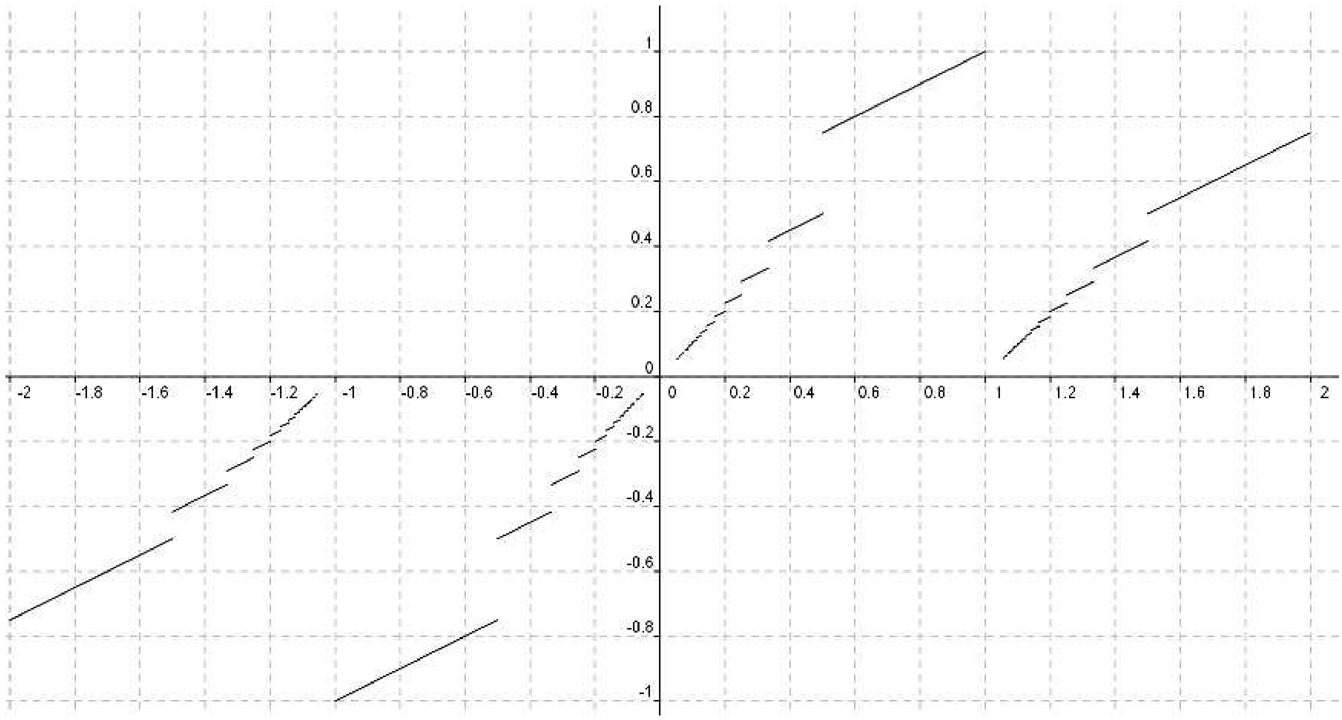
Preuve. On a $f(I_n) =]\frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), x_n]$ et $f(J_n) =]x_{n+1}, \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)]$. Tous ces intervalles sont disjoints et leur union est $]0, 1]$. Donc f restreinte à $]0, 2]$ est une bijection sur $]0, 1]$. Donc f est une bijection de $[-2, +2]$ sur $[-1, +1]$. Sur l'intervalle I_n, le graphe de f est est coincé entre la droite passant par $(0, 0)$ et $(x_{n+1}, \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n))$ (qui a pour pente $\frac{1}{2}(1 + \frac{x_n}{x_{n+1}}) > 1$) et la diagonale. Donc

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{x_n}{x_{n+1}}) \tag{3}$$

Pour n suffisamment grand ceci est inférieur à $1 + \varepsilon$, puisque $\lim \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1$ par hypothèse. Donc $f'_d(0)$ existe et vaut 1. La fonction étant impaire, on a aussi $f'_g(0)$ qui existe et vaut 1. Donc $f'(0) = 1$. Finalement la fonction réciproque n'est certainement pas continue en $y = 0$ puisqu'il y a des points positifs arbitrairement proches dont les images sont > 1 et aussi d'ailleurs des points négatifs d'images < -1. □

T.S.V.P.

Voici une représentation graphique pour $x_n = \frac{1}{n}$ (il faut imaginer ce qui se passe au voisinage de $(0, 0)$) :



T.S.V.P.

Et, pour ceux qui ne peuvent pas imprimer sur un calque transparent, le graphe de la fonction réciproque :