Un exercice sur les fonctions convexes

Jean-François Burnol, 15 octobre 2009

1 L'énoncé

Soit $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer :

1. la fonction f est minorée,
2. si elle est majorée alors elle est prolongeable par continuité en a et en b,
3. si elle n'est pas majorée alors soit $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ soit $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

Dans le cas où elle est majorée, décrire toutes les extensions possibles de f à $[a, b]$ qui préservent la convexité.

2 Preuve

Je rappelle qu'une fonction convexe sur un intervalle I admet en tout point intérieur c une dérivée à droite l_d, et que $x \geq c \implies f(x) \geq f(c) + (x - c)l_d$, et par ailleurs une dérivée à gauche l_g et $f(x) \geq f(c) + (x - c)l_g$ pour $x \leq c$. On prendra ici par exemple $c = \frac{1}{2}(a + b)$, et on peut alors affirmer $f(x) \geq f(c) - \frac{1}{2}(b - a) \max(|l_d|, |l_g|)$ pour tout x. Ainsi f est minorée.

Supposons maintenant que f est majorée. On va juste supposer que f est majorée au voisinage de a et prouver sous cette hypothèse l'existence de la limite finie $\lim_{x\to a} f(x)$. La même preuve s'applique pour b bien sûr. Le vocabulaire des limites supérieures et inférieures sera très utile. Soit donc $L = \liminf_{x\to a} f(x)$. On a (c'est le point crucial) $L < \infty$ puisque f est majorée au voisinage de a (et de plus $L > -\infty$ car f est minorée). On peut choisir par récurrence des $x_n > a$ pour $n \geq 1$ vérifiant $f(x_n) \leq L+\frac{1}{n}$, $a < x_{n+1} < x_n$ et $\lim x_n = a$. Soit maintenant $x \in]a, x_N]$. Il existe un $n \geq N$ tel que $x_{n+1} \leq x \leq x_n$. Comme f est convexe et que $\max(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq L + \frac{1}{n}$, on a aussi $f(x) \leq L + \frac{1}{n}$ et ainsi $f(x) \leq L + \frac{1}{N}$. Donc on a l'implication $a < x \leq x_N \implies f(x) \leq L + \frac{1}{N}$. Par conséquent $\limsup_{x\to a} f(x) \leq L$. Mais ce L est la liminf donc en fait limsup = liminf ce qui prouve $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Venons-en au cas avec f non majoré.

Supposons tout d'abord qu'à la fois $P = \limsup_{x\to a} f(x)$ et $Q = \limsup_{x\to b} f(x)$ soient finies. Il existe un $\epsilon > 0$ (plus petit que $\frac{1}{2}(b-a)$) tel que $f(x) \leq P+1$ pour $a < x \leq a+\epsilon$ et $f(x) \leq Q+1$ pour $b-\epsilon \leq x < b$. Sur le segment $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ la fonction convexe f est continue donc majorée. Au total f serait majorée sur $]a, b[$. Comme ce n'est pas le cas c'est donc que soit $P = +\infty$, soit $Q = +\infty$. Considérons le premier cas. Ré-examinons $L = \liminf_{x\to a} f(x)$. Dans le paragraphe précédent, en faisant l'hypothèse $L < \infty$ nous avons prouvé qu'en fait $L = \lim_{x\to a} f(x)$. Mais on aurait alors $P = L < \infty$, c'est donc que $L = \infty$ et par conséquent $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Et de même si $Q = \infty$ on prouve $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$.

Finalement, revenons à la situation où f est majorée, et notons $\alpha = \lim_{x\to a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x\to b} f(x)$. Supposons que f soit prolongée à $[a, b]$ en une fonction convexe. Alors $f(a+\frac{1}{2}\epsilon) \leq \frac{1}{2}(f(a)+f(a+\epsilon))$ et en passant à la limite pour $\epsilon \to 0$: $\alpha \leq \frac{1}{2}(f(a)+\alpha)$, donc $\alpha \leq f(a)$. De même $\beta \leq f(b)$. Montrons que ce sont les seules contraintes. Il s'agit de vérifier $f(ux + (1-u)y) \leq uf(x) + (1-u)f(y)$ pour $a \leq x < y \leq b$ et $0 < u < 1$. Si $a < x < y < b$

c'est vrai par la convexité sur $]a,b[$. En fixant $y < b$ et en passant à la limite pour $x \to a$ on obtient, en utilisant la continuité de f sur $]a,b[$: $f(ua+(1-u)y) \leq u\alpha+(1-u)f(y) \leq uf(a)+(1-u)f(y)$. Et si par contre on fixe $x > a$ et on prend la limite pour $y \to b$ on obtient $f(ux+(1-u)b) \leq uf(x)+(1-u)\beta \leq uf(x)+(1-u)f(b)$. La formule est donc vraie si soit $x = a$, soit $y = b$. En prenant à nouveau, disons dans la dernière inégalité, la limite $x \to a$, on obtient $f(ua+(1-u)b) \leq u\alpha+(1-u)f(b) \leq uf(a)+(1-u)f(b)$. Par conséquent l'inégalité de convexité est établie dans tous les cas.

3 Rappels sur les limites inférieures et supérieures

limsup et liminf sont des concepts extrêmement utiles, et il faut prendre l'habitude de les manier. Pour une fonction g définie sur $]a,b[$, on définit $L = \mathrm{limsup}_{x\to a}\, g(x)$ dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ en posant $L = \lim_{x\to a} k(x)$ avec $k(x) = \sup\{g(y), a < y \leq x\}$. En effet k est une fonction croissante sur $]a,b[$ (à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$) et admet donc une limite L (qui vaut éventuellement $-\infty$) en a (comme on vient de la droite vers a, la limite est atteinte de manière décroissante). Notez qu'il n'y a que deux cas possibles pour la fonction croissante k : soit il existe $\epsilon > 0$ avec $k(x) < \infty$ pour $x < a+\epsilon$, soit en fait $k(x) = +\infty$ pour tous les x. Le premier cas correspond à une limsup en a qui est finie ou égale à $-\infty$, le deuxième cas correspond à $\mathrm{limsup}_{x\to a}\, g(x) = +\infty$.

De même $\mathrm{liminf}_{x\to a}\, g(x) = \lim_{x\to a} \inf\{g(y), a < y \leq x\}$, et il s'agit de la limite d'une fonction décroissante (la fonction est à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et la limite, qui est atteinte de manière croissante puisque x décroît vers a peut, elle, être égale à $+\infty$).

On a donc toujours l'existence de $\mathrm{liminf}_{x\to a}\, g(x)$ et de $\mathrm{limsup}_{x\to a}\, g(x)$ et l'inégalité $\mathrm{liminf}_{x\to a}\, g(x) \leq \mathrm{limsup}_{x\to a}\, g(x)$. De plus il existe (dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$) $\lim_{x\to a} g(x)$ si et seulement si les limites inférieure et supérieure coïncident.

Concluons en signalant que le passage aux limites inférieures ou supérieures fonctionne bien dans les égalités et les inégalités, modulo quelques pièges : par exemple si $g(x) = g_1(x)+g_2(x)$ alors $\mathrm{limsup}_{x\to a}\, g(x) \leq \mathrm{limsup}_{x\to a}\, g_1(x)+\mathrm{limsup}_{x\to a}\, g_2(x)$ (pas nécessairement $=$) et $\mathrm{liminf}_{x\to a}\, g(x) \geq \mathrm{liminf}_{x\to a}\, g_1(x) + \mathrm{liminf}_{x\to a}\, g_2(x)$. Et encore faut-il ajouter qu'il ne faut pas que les termes de droite donnent une forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$ ou $(-\infty)+(+\infty)$. Souvent, on a par exemple l'existence d'une limite finie $\lim_{x\to a} g_1(x)$, dans ce cas on a bien les égalités : $\mathrm{limsup}_{x\to a}\, g(x) = \lim_{x\to a} g_1(x) + \mathrm{limsup}_{x\to a}\, g_2(x)$ et $\mathrm{liminf}_{x\to a}\, g(x) = \lim_{x\to a} g_1(x) + \mathrm{liminf}_{x\to a}\, g_2(x)$. Lorsque l'on s'intéresse à un produit $g_1(x)g_2(x)$ il faut faire attention aux signes, je supposerai donc que g_1 et g_2 sont positives, alors $\mathrm{limsup}\, g_1g_2 \leq (\mathrm{limsup}\, g_1)(\mathrm{limsup}\, g_2)$, $\mathrm{liminf}\, g_1g_2 \geq (\mathrm{liminf}\, g_1)(\mathrm{liminf}\, g_2)$ sauf dans les cas d'ambiguïté $\infty \cdot 0$ ou $0 \cdot \infty$ et il y a égalité si $\lim g_1$ existe et n'est ni nulle ni infinie. Terminons par les règles $\mathrm{limsup}(-g) = -\,\mathrm{liminf}\, g$ et $\mathrm{liminf}(-g) = -\,\mathrm{limsup}\, g$ et on aura à peu près tout dit.

Tout cela marche très bien avec les suites, avec $\mathrm{limsup}\, u_n = \lim(\sup_{m\geq n} u_m)$ (limite décroissante) et $\mathrm{liminf}\, u_n = \lim(\inf_{m\geq n} u_m)$ (limite croissante). La limsup est la plus grande valeur d'adhérence (= limite de suite extraite) possible, et la liminf la plus petite (toujours dans $\overline{\mathbf{R}}$). Bien sûr personne n'a jamais dit que les valeurs coincées entre la liminf et la limsup étaient elles aussi des valeurs d'adhérence possibles ! Il se peut qu'il n'y en ait aucune autre comme il se peut qu'elles le soient toutes ! (donner des exemples...).

Le logiciel LaTeX pour la typographie des articles mathématiques formate par défaut $\limsup$ et $\liminf$. Je préfère sans espace mais j'oublie souvent de modifier les défauts de LaTeX dans mes textes. Il y a aussi les variantes $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$.