Dirichlet, Fourier, Plancherel

Jean-François Burnol, 11 novembre 2011

1 Introduction

Cette fiche est destinée à plusieurs publics,[1] dont celui de ceux qui auront assisté à la performance du Professeur au tableau ; ce public de quatrième année sortait de plusieurs semaines qui avaient débuté par des « rappels » sur l'intégrale de Riemann, puis s'étaient poursuivies avec l'étude de l'orthogonalité et des notions annexes, en particulier dans le contexte des séries de Fourier pour les fonctions Riemann intégrables périodiques.

Voulant poursuivre avec de tels « rappels » je me suis dit que j'allais traiter de la tranformation intégrale de Fourier (formule d'inversion, identité de Plancherel), mais avec les contraintes respectées jusque-là : n'avoir à sa disposition que l'intégrale de Riemann,[2] dans une version très limitée car je ne me suis pas autorisé à enrichir mes outils par des interversions d'intégrales.

En deuxième année pourtant certains étudiants ont pu avoir la chance de suivre le Cours de mon collègue le Professeur Flaminio[3] qui traite de l'intégrale de Riemann en dimension > 1 et donc prouve les théorèmes sur les intégrales multiples ou itérées. Et bien sûr il y a ceux qui auront suivi en troisième année le cours sur l'intégrale de Lebesgue.

Mais bref, je m'en tiens donc aux notions de première année, même si ne pas savoir faire d'intégrales itérées est une limitation majeure pour le développement de la théorie de la tranformation de Fourier. En particulier cela rend difficilement abordable le concept clef de « convolution ». J'insiste auprès du lecteur que la notion fondamentale qui va manquer à notre contexte étriqué est bien celle de « convolution ». Ah oui, les notions d'espace de Hilbert et de Banach seraient utiles aussi. Sans même parler de la nécessité de passer à des classes d'équivalence de fonctions.

2 Notations et les deux énoncés principaux

Je noterai $\mathcal{R}$ l'espace vectoriel des fonctions f sur la droite réelle, à valeurs réelles ou complexes, intégrables au sens de Riemann sur tout segment ; $\mathcal{R}^1$ son sous-espace vectoriel des fonctions f possédant une intégrale généralisée absolument convergente ($\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$), et $\mathcal{R}^2$ son *autre* sous-espace des fonctions de *carrés* intégrables, c'est-à-dire des fonctions avec $\|f\|_2 := (\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

1. du coup, j'ai mis plus que ce qui serait raisonnable pour le public α.
2. les premières pages de http://jf.burnol.free.fr/0506L312annexeRiemann.pdf suffisent.
3. http://www-gat.univ-lille1.fr/~flaminio/m203/2009-2010/index.html

Je « rappelle » que l'intégrale généralisée (ou « impropre ») $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ est définie par $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\,dt + \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^0 f(t)\,dt$ lorsque ces **deux** limites existent ; et c'est le cas si elles existent avec $|f|$ à la place de f (notion de convergence absolue), ce qui se teste en vérifiant si $\int_{-A}^{A}|f(t)|\,dt$ est majoré indépendamment de A.

Le machin $\|f\|_1$ est une *semi*-norme (*semi*, car on n'a pas quotienté par les fonctions « presque partout nulles »). De plus on a déjà vu, pour les intégrales sur un segment, les arguments (passant par Cauchy-Schwarz) qui montrent que $\|\cdot\|_2$ est une semi-norme : c'est juste un tout petit peu plus compliqué sur $\mathbb{R}$ tout entier car sur le segment on n'avait pas besoin de passer à un sous-ensemble de $\mathcal{R}$ pour définir $\|\cdot\|_2$ (je rappelle que nous n'utilisons que des fonctions intégrables au sens de Riemann, donc bornées sur tout segment), et donc on n'avait pas en plus à faire la vérification (laissée en exercice ici) que ce sous-ensemble $\mathcal{R}^2$ était bien un sous-espace vectoriel.

La nouveauté sur $\mathbb{R}$ tout entier est donc que $\mathcal{R}$ contient strictement $\mathcal{R}^1$ et $\mathcal{R}^2$ et que ces deux derniers ne coïncident pas (et aucun des deux ne contient l'autre).

Voici deux des cinq Théorèmes que nous allons prouver dans cette fiche :

Théorème 1. *Soit $f \in \mathcal{R}^1$. Sa transformée de Fourier, définie par :*

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt\ , \tag{1}$$

est une fonction continue de u qui tend vers zéro pour $|u| \to \infty$.

Et, entre autres sous les conditions « de Dirichlet »,[4] *à savoir l'existence de limites à droite et à gauche au point t_0, et de dérivées à droite et à gauche (définies en prenant en compte les valeurs $f(t_0^\pm)$), on a la* formule d'inversion de l'intégrale de Fourier *:*

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \lim_{\Lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\widehat{f}(u)e^{+iut_0}\,du \tag{2}$$

Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2$. Alors $\widehat{f}$ est dans $\mathcal{R}^2$ et on a la* formule de Plancherel *:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(u)|^2\,du \tag{3}$$

Je n'entre pas dans la problématique de définir $\widehat{f}$ lorsque l'on a seulement $f \in \mathcal{R}^2$ (la définition de départ ne marche plus puisque les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$ pourraient ne pas exister) et puis on sait que le bon contexte pour cela est celui de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dt)$, or je n'ai pas abordé les espaces de Hilbert dans mon cours.

4. les vraies conditions de Dirichlet sont en fait différentes, mais peu importe ici.

Je n'entre pas non plus dans les considérations qui débutent avec les fonctions de la classe de Schwartz, ceux qui lisent cette fiche et qui ont en vue l'agrégation externe auront appris la théorie des distributions et donc doivent savoir ce à quoi je fais allusion ici. Je n'aborde même pas les remarques basiques encore plus simples autour des relations entre l'intégrale de Fourier et la dérivation, mais cela doit être approfondi (ailleurs) par n'importe quel apprenant (sic) en butte avec cette fiche.

3 Lemme de Riemann-Lebesgue et Théorème de Dirichlet

Je recopie ici des énoncés vus et déjà démontrés dans le cadre de mon cours :

Théorème 3 (Riemann-Lebesgue)**.** *Soit* $f \in \mathcal{R}([a,b])$. *Alors* $\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt = 0$.

Théorème 4 (Dirichlet)**.** *Soit* $b > 0$ *et soit* F *une fonction intégrable au sens de Riemann sur tous les* $]\eta, b]$ $(0 < \eta < b)$. *On suppose que* $\mathrm{L} = \lim_{x\to 0} \mathrm{F}(x)$ *existe, et que* F *ainsi prolongée par continuité (qui est donc Riemann intégrable sur* $[0,b]$*) est dérivable en* 0. *Alors :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^b \frac{\sin(\lambda x)}{x}\mathrm{F}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{F}(0^+) \tag{4}$$

Soit $f \in \mathcal{R}^1$. Pour tout u *réel* l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$ est absolument convergente et sa valeur absolue (ou plutôt son module complexe) est majorée par $\|f\|_1$. Comme cela est très important, mettons donc en évidence cette majoration toute bête :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\widehat{f}(u)| \leqslant \|f\|_1 \tag{5}$$

Soit $\epsilon > 0$ puis soit $\mathrm{A} \gg 0$ de sorte que $\int_{-\infty}^{-\mathrm{A}} |f(t)|\,dt + \int_{\mathrm{A}}^{\infty} |f(t)|\,dt \leqslant \epsilon$. Par le Lemme de Riemann-Lebesgue pour la restriction de f à l'intervalle $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$, il existe Λ tel que, pour $|\lambda| \geqslant \Lambda$, on a

$$\left| \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \right| \leqslant \epsilon \tag{6}$$

et donc :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda t}\,dt \right| \leqslant 2\epsilon\ , \tag{7}$$

ce qui prouve (avec $\lambda = -u$) que $\widehat{f}(u)$ tend vers zéro pour u tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Considérons maintenant comme dans le Théorème 4 une fonction F, mais cette fois sur $[0, +\infty[$. On suppose que F est dans $\mathcal{R}^1([0, +\infty[)$, c'est alors le cas aussi pour

$\frac{\sin(\lambda x)}{x}\mathrm{F}(x)$ puisque $|\frac{\sin(\lambda x)}{x}| \leqslant \lambda$ et on peut s'intéresser à $\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x)}{x}\mathrm{F}(x)\,dx$ qui est absolument convergente. En découpant cette intégrale en la somme de celle sur $[0,1]$ et de celle sur $[1,+\infty[$, on voit que le deuxième terme tend vers zéro par Riemann-Lebesgue (dans sa version sur un intervalle infini que nous venons d'établir, car il suffira de prolonger l'intégrande par zéro sur $]-\infty,1[$, et d'exprimer sinus avec l'exponentielle pour utiliser des transformées de Fourier) et que le premier terme tend vers $\frac{\pi}{2}\mathrm{F}(0^+)$ si les conditions « de Dirichlet » sont satisfaites. Ainsi dans le Théorème de Dirichlet 4 on peut avoir $b = +\infty$.

4 Continuité de la fonction $\widehat{f}$

Considérons d'abord les fonctions $g_n(u) = \int_{-n}^{n} f(t)e^{-iut}\,dt$. Comme par (par exemple) l'inégalite des accroissements finis $|e^{-iut} - e^{-ivt}| \leqslant |t||u-v|$, on a $|g_n(u) - g_n(v)| \leqslant |u-v|\int_{-n}^{n}|f(t)||t|\,dt$ ce qui montre que g_n est Lipschitzienne, et a fortiori continue.

Comme $|\widehat{f}(u) - g_n(u)| \leqslant \int_{-\infty}^{-n}|f(t)|\,dt + \int_{n}^{\infty}|f(t)|\,dt$ on a convergence uniforme $g_n \overset{\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \widehat{f}$, et par conséquent la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction intégrable f est une fonction continue.

Notez bien que cela a pour conséquence que si l'on cherche à représenter une fonction ayant une discontinuité en un seul point comme une transformée de Fourier d'une autre fonction, cela ne sera pas possible avec la définition que nous avons donnée ici qui ne fonctionne qu'en cas de convergence absolue de l'intégrale de Fourier et fournit des transformées de Fourier qui sont des fonctions continues sur la droite réelle. [5]

5 Un Lemme crucial

Il serait immédiat si l'on disposait du théorème de Fubini sur l'interversion des intégrales. Mais nous allons le prouver élémentairement.

Lemme 1. *Soit $f \in \mathcal{R}^1$ et $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier. Pour tout $\Lambda > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{f}(u)e^{iut_0}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx \tag{8}$$

Preuve. Remarquons d'abord que l'intégrale à droite est absolument convergente. Ensuite, soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions en escaliers avec

$$n \geqslant 1 \implies \|f - \varphi_n\|_1 \leqslant \frac{1}{n}\,. \tag{9}$$

5. et même *uniformément continues*. Prouvez-le en examinant notre preuve de continuité.

Pour trouver φ_n il suffit d'abord de choisir A_n avec $\int_{-\infty}^{-\mathrm{A}_n}|f(t)|\,dt + \int_{\mathrm{A}_n}^{\infty}|f(t)|\,dt \leqslant (2n)^{-1}$. Puis de choisir φ_n sur $[-\mathrm{A}_n, +\mathrm{A}_n]$ de sorte que $\int_{-\mathrm{A}_n}^{\mathrm{A}_n}|f(t)-\varphi_n(t)|\,dt \leqslant (2n)^{-1}$, ce qui est possible par ce que nous savons des fonctions intégrables (au sens de Riemann, mais cela resterait vrai, bien que beaucoup plus profond, pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue).

Comme $\sup_u|\widehat{f}(u)-\widehat{\varphi_n}(u)| \leqslant \frac{1}{n}$, on a

$$\left|\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\widehat{f}(u)e^{iut_0}\,du - \int_{-\Lambda}^{\Lambda}\widehat{\varphi_n}(u)e^{iut_0}\,du\right| \leqslant \frac{2\Lambda}{n} \tag{10}$$

Et par ailleurs

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\frac{2\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx\right| \leqslant 2\Lambda\|f-\varphi_n\|_1 \leqslant \frac{2\Lambda}{n}\ , \tag{11}$$

donc si la formule (8) est vraie pour φ_n à la place de f on aura

$$\left|\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\widehat{f}(u)e^{iut_0}\,du - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx\right| \leqslant \frac{4\Lambda}{n}\ , \tag{12}$$

et en faisant tendre n vers l'infini on obtient le résultat voulu.

Il suffit donc d'établir le Lemme pour les fonctions en escaliers [6], et donc par linéarité il suffit de prouver le Lemme lorsque f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[a,b]$, $a<b$.[7]

Dans ce cas $\widehat{f}(u) = \int_a^b e^{-iut}\,dt = \frac{e^{-iua}-e^{-iub}}{iu}$ (la valeur en $u=0$ est $b-a$). On a alors, par une succession d'étapes simples :

$$\begin{aligned}
\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\widehat{f}(u)e^{iut_0}\,du &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{e^{iu(t_0-a)}-e^{-iu(b-t_0)}}{iu}\,du && (13)\\
&= \int_{-\Lambda}^{\Lambda}\frac{\sin(u(t_0-a))+\sin(u(b-t_0))}{u}\,du && (14)\\
&= \int_{-\Lambda(t_0-a)}^{\Lambda(t_0-a)}\frac{\sin(v)}{v}\,dv + \int_{-\Lambda(b-t_0)}^{\Lambda(b-t_0)}\frac{\sin(v)}{v}\,dv && (15)
\end{aligned}$$

6. par convention une fonction en escalier a toujours support compact.

7. les deux côtés de l'égalité à prouver (8) ne changent pas si l'on prend comme intervalle $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $[a,b]$.

$$= 2\int_{\Lambda(a-t_0)}^{0} \frac{\sin(v)}{v}\,dv + 2\int_{0}^{\Lambda(b-t_0)} \frac{\sin(v)}{v}\,dv \tag{16}$$

$$= 2\int_{a}^{t_0} \frac{\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx + 2\int_{t_0}^{b} \frac{\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx \tag{17}$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{2\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx \tag{18}$$

Le Lemme est donc démontré. □

6 La formule d'inversion de Fourier

Grâce au Lemme crucial, on a

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{f}(u)e^{iut_0}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2\sin(\Lambda(x-t_0))}{x-t_0}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+t_0)\frac{2\sin(\Lambda y)}{y}\,dy = \int_{0}^{\infty} \mathrm{F}(y)\frac{2\sin(\Lambda y)}{y}\,dy\ , \tag{19}$$

avec $\mathrm{F}(y) = f(t_0+y)+f(t_0-y)$. Sous les hypothèses faites dans le Théorème 1 il existe $\mathrm{F}(0^+)$ et la dérivée à droite, donc le Théorème de Dirichlet nous donne la limite pour $\Lambda \to +\infty$ comme valant $\pi(f(t_0^+) + f(t_0^-))$. Ainsi, la formule d'inversion de Fourier est prouvée.

Répétons que le « lemme crucial » est immédiat si l'on dispose du théorème de Fubini. Il n'est pas trop difficile sans, encore que même pour la fonction indicatrice d'un intervalle il ait fallu procéder soigneusement pour ne pas s'emmêler les pinceaux.

7 La formule de Plancherel

Nous allons la démontrer par étapes. L'idée de base de notre approche est d'exploiter la formule de Bessel-Parseval pour les fonctions périodiques.

Donc, dans un premier temps nous prenons f dans $\mathcal{R}$, mais à support dans un segment $[\alpha, \beta]$. Choisissons maintenant $\Lambda > \max(|\alpha|, |\beta|)$ et prolongeons la fonction f par 2Λ périodicité. Les coefficients de Fourier pour la fonction 2Λ périodique sont :

$$c_n = \frac{1}{2\Lambda}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(t)e^{-\frac{\pi i n t}{\Lambda}}\,dt = \frac{1}{2\Lambda}\widehat{f}(\frac{\pi n}{\Lambda}) \tag{20}$$

La formule de Bessel-Parseval est :

$$\frac{1}{2\Lambda}\int_{-\Lambda}^{\Lambda}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2\Lambda)^2}\left|\widehat{f}(\frac{\pi n}{\Lambda})\right|^2 \tag{21}$$

On a donc un deuxième « Lemme crucial » :

Lemme 2. *Soit f Riemann intégrable et à support* ***compact****.* [8] *Pour* tout Λ *suffisamment grand, on a l'identité :*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\pi}{\Lambda}\left|\widehat{f}(\frac{\pi n}{\Lambda})\right|^2 \tag{22}$$

Il est *extrêmement remarquable* que cette identité soit valable **pour tous les Λ suffisamment grands**, puisque le terme de gauche ne dépend pas de Λ tandis que le terme de droite semble en dépendre d'une manière fort compliquée.

On reconnaît nos amies familières (?vraiment ! ? ! on en douterait parfois) les sommes de Riemann (pour la fonction $|\widehat{f}(u)|^2$), et comme la fonction $\widehat{f}$ est continue, la situation ici nous est très favorable. Soit $X > 0$, N un grand entier, et Λ choisi de sorte que

$$\frac{\pi}{\Lambda} = \frac{X}{N}, \qquad (\Lambda = N\frac{\pi}{X}) \tag{23}$$

La somme avec 2N termes $\sum_{-N<n\leqslant N}\frac{\pi}{\Lambda}\left|\widehat{f}(\frac{\pi n}{\Lambda})\right|^2$ est une somme de Riemann sur l'intervalle $[-X,+X]$, pour la subdivision équidistante en 2N sous-intervalles, pour la fonction continue $\theta(u) = |\widehat{f}(u)|^2$. Lorsque l'on fait tendre N (c'est-à-dire Λ) vers l'infini, les sommes de Riemann convergent vers $\int_{-X}^{X}|\widehat{f}(u)|^2\,du$. Ce sont là, comparées aux sommes infinies de notre Lemme, des sous-sommes, ne portant chacune que sur un nombre fini de termes. On a donc en tout cas la majoration :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-X}^{X}|\widehat{f}(u)|^2\,du \tag{24}$$

Et comme $X > 0$ est arbitraire, on obtient :

Proposition 1. *Pour toute fonction f Riemann intégrable à support compact, on a la majoration :*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(u)|^2\,du \tag{25}$$

En particulier la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est de carré intégrable !

8. le support est un fermé par définition, le dire compact, c'est une façon de le dire borné.

Supposons que $\widehat{f}$ a la propriété supplémentaire suivante :

$$\exists \mathrm{K} \qquad |u| \geqslant 1 \implies |\widehat{f}(u)| \leqslant \frac{\mathrm{K}}{|u|} \tag{26}$$

Cela est faux en toute généralité, mais est vérifié assez souvent, et en tout cas c'est vrai lorsque f est une *fonction en escalier* : il suffit de regarder la formule pour la transformée de Fourier de la fonction indicatrice d'un intervalle, elle est bien $O(u^{-1})$ à l'infini.

Revenons alors à notre Lemme plus haut pour une telle f, avec un $\mathrm{X} > 1$, et N suffisamment grand de sorte que $\Lambda = \mathrm{N}\frac{\pi}{\mathrm{X}}$ soit tel que $[-\Lambda, \Lambda]$ contienne le support de f. Nous avions une somme infinie dont nous avons extrait $2\mathrm{N}$ termes qui forment une somme de Riemann. Les termes avec $n > \mathrm{N}$ donnent une contribution majorée par

$$\sum_{n>\mathrm{N}} \frac{\pi}{\Lambda}\left|\frac{\mathrm{K}}{\frac{\pi n}{\Lambda}}\right|^2 = \mathrm{K}^2\frac{\Lambda}{\pi}\sum_{n>\mathrm{N}}\frac{1}{n^2} \leqslant \mathrm{K}^2\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{X}}\sum_{n>\mathrm{N}}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{X}} \tag{27}$$

Les termes avec $n \leqslant -\mathrm{N}$ donneront une contribution majorée par la même chose plus la contribution de $n = -\mathrm{N}$ c'est-à-dire $\frac{\Lambda}{\pi}\mathrm{K}^2\mathrm{N}^{-2} = \mathrm{K}^2\frac{1}{\mathrm{NX}}$. En tout on a donc une erreur d'au plus $3\mathrm{K}^2\mathrm{X}^{-1}$, erreur qui ne dépend pas de N !

On prend maintenant $\epsilon > 0$, puis $\mathrm{X} > 1$ suffisamment grand pour que $\mathrm{K}^2\mathrm{X}^{-1} \leqslant 2\pi\epsilon$, puis on applique la formule du Lemme pour $\Lambda = \mathrm{N}\frac{\pi}{\mathrm{X}}$ tendant vers l'infini. Par ce qui précède, l'écart entre $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}}|\widehat{f}(u)|^2\,du$ est majoré par $\frac{1}{2\pi}3\mathrm{K}^2\mathrm{X}^{-1} \leqslant 3\epsilon$.

Par ailleurs $\int_{\mathrm{X}}^{\infty}|\widehat{f}(u)|^2\,du \leqslant \int_{\mathrm{X}}^{\infty}\mathrm{K}^2u^{-2}\,du = \mathrm{K}^2\mathrm{X}^{-1}$. Donc l'écart entre $\frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}}|\widehat{f}(u)|^2\,du$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(u)|^2\,du$ est au plus 2ϵ. Au final :

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(u)|^2\,du\right| \leqslant 5\epsilon \tag{28}$$

On fait tendre ϵ vers zéro et on a prouvé ce résultat intermédiaire supplémentaire :

Proposition 2. *Soit f à support compact dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est $O(u^{-1})$ à l'infini (par exemple, c'est le cas lorsque f est une fonction en escalier), alors on a l'identité de Plancherel :*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(u)|^2\,du \tag{29}$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2$ quelconque. Soit f_n la fonction égale à f sur $[-n, n]$ et à zéro ailleurs. Elle est à support compact, donc $\widehat{f_n}$ est de carré intégrable. Comme $\|f_n - f\|_1 \to 0$ on sait que $\widehat{f_n}$ converge uniformément vers $\widehat{f}$. Donc, pour tout $\mathrm{X} > 0$,

$$\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}}\left|\widehat{f_n}(u)\right|^2 du \underset{n\to\infty}{\to} \int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}}\left|\widehat{f}(u)\right|^2 du\ . \tag{30}$$

Le terme de gauche est majoré par $\|\widehat{f_n}\|_2{}^2 \leqslant 2\pi \|f_n\|_2{}^2 \leqslant 2\pi\|f\|_2{}^2$. Donc

$$\forall X > 0 \quad \int_{-X}^{X} \left|\widehat{f}(u)\right|^2 du \leqslant 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt \tag{31}$$

ce qui en passant à la limite pour $X \to \infty$ donne :

$$\forall f \in \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2 \qquad \|\widehat{f}\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_2 \tag{32}$$

En particulier $\widehat{f}$ est de carré intégrable !

Pour montrer qu'il y a en fait $\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ nous prenons φ en escalier avec $\|f-\varphi\|_2 \leqslant \epsilon$. C'est possible car on peut d'abord choisir n tel que, avec les notations précédentes, $\|f - f_n\|_2 \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Par la Riemann-intégrabilité de f_n on peut choisir φ en escalier sur $[-n, n]$ vérifiant

1. $\sup|\varphi| \leqslant 1 + \sup|f_n|$,
2. et $\int_{-n}^{n} |f_n(t) - \varphi(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{4}\epsilon^2(1 + 2\sup|f_n|)^{-1}$.

On a alors $\int_{-n}^{n} |f_n(t) - \varphi(t)|^2\, dt \leqslant (\frac{\epsilon}{2})^2$ et en prolongeant φ par zéro il vient finalement $\|f - \varphi\|_2 \leqslant \epsilon$. On a ensuite les majorations

$$\left|\|\widehat{f}\|_2 - \|\widehat{\varphi}\|_2\right| \leqslant \|\widehat{f} - \widehat{\varphi}\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f-\varphi\|_2 \leqslant \epsilon\sqrt{2\pi} \tag{33}$$

et par ailleurs,

$$\left|\|f\|_2 - \|\varphi\|_2\right| \leqslant \|f - \varphi\|_2 \leqslant \epsilon \tag{34}$$

Comme $\|\widehat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|\varphi\|_2$, il en résulte

$$\left|\|\widehat{f}\|_2 - \sqrt{2\pi}\|f\|_2\right| \leqslant 2\epsilon\sqrt{2\pi}\ . \tag{35}$$

Comme la majoration est arbitrairement petite, ceci conclut la preuve de la formule de Plancherel pour les fonctions intégrables sur tout segment au sens de Riemann, intégrables et de carrés intégrables sur la droite réelle.

8 La forme sesquilinéaire de la formule de Plancherel

On sait que si f et g sont dans $\mathcal{R}^2$, le produit fg est dans $\mathcal{R}^1$, en fait $|fg| \leqslant \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2$. On a même l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$. Supposons donc que f et g sont dans $\mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2$, les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont définies et sont de carrés intégrables par la formule de Plancherel. Sur $\mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2$ on a ainsi deux produits scalaires :[9]

$$(f\,,g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt \qquad \text{et} \qquad \langle f\,,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{g}(u)}\, du \tag{36}$$

9. « semi »-produits scalaires, puisqu'on n'a pas quotienté par les choses presque partout nulles.

Par la formule de Plancherel les normes associées sont les mêmes : donc par un résultat général sur les espaces hermitiens (formule de polarisation donnant le produit scalaire à partir de la norme) les deux produits scalaires sont les mêmes. Ainsi :

$$\forall f, g \in \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{g}(u)}\,du \tag{37}$$

Proposition 3. *Soit $f \in \mathcal{R}^1 \cap \mathcal{R}^2$. Pour tout choix de a et b réels on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u)\frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu}\,du \tag{38}$$

Preuve. On peut toujours supposer $a < b$ et alors on applique la forme sesquilinéaire de la formule de Plancherel avec pour g la fonction qui vaut 1 pour $a < t < b$ et zéro ailleurs. □

Cette formule s'obtient de manière mnémotechnique en se souvenant de la formule d'inversion formelle $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(u)e^{itu}\,du$ (« formelle » parce que sans hypothèses supplémentaires sur f, on ne sait même pas si l'intégrale existe) et en intégrant de a à b directement sous le signe d'intégration, ce qui est une autre opération formelle qui nécessiterait justification. Heureusement, notre proposition a pu être établie par un chemin (totalement) différent.

9 La formule d'inversion de Lévy

Théorème 5. *Soit $f \in \mathcal{R}^1$. On a :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\Lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{f}(u)\frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu}\,du \tag{39}$$

Il n'est pas du tout évident à ce stade (sauf si f donc $\widehat{f}$ est de carré intégrable) que la limite prise dans le Théorème existe. Comme indiqué précédemment on peut se souvenir de cette formule en intégrant formellement la formule d'inversion. Le problème bien sûr est que la formule d'inversion au point t_0 (Théorème 1) ne fonctionne que sous des hypothèses locales en t_0 et que même si ces hypothèses sont vérifiées il n'est pas évident ensuite de justifier l'intégration par rapport à t_0, vu maintenant comme un paramètre.

Preuve. On peut toujours se limiter à $a < b$, quitte à les échanger (le cas $a = b$ est trivial). Soit $\epsilon > 0$. On choisit A vérifiant les conditions : (1) $A/2 > \max(|a|, |b|)$, et

(2) $\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\, dt + \int_{A}^{\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \epsilon$. Puis on écrit $f = g + k$ avec g égale à f sur l'intervalle $[-A, A]$ et à zéro ailleurs. La fonction g est de carré intégrable et $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt$.

Il nous faut trouver un moyen de majorer, pour chaque Λ :

$$K(b) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{k}(u) \frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu}\, du \tag{40}$$

Nous considérons cette expression comme une fonction $K(b)$ de $b \in [-\frac{1}{2}A, +\frac{1}{2}A]$, nulle en a. Pour la majorer, il suffit de savoir majorer sa dérivée. Pour montrer qu'elle est dérivable, on attaque le problème directement. Par Taylor-Laplace :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad e^{iy} = e^{ix} + i(y-x)e^{ix} - \int_x^y e^{it}(y-t)dt \tag{41}$$

$$\left|e^{iy} - e^{ix} - i(y-x)e^{ix}\right| \leqslant \frac{1}{2}(x-y)^2 \tag{42}$$

donc :

$$\left|\frac{e^{i(b+h)u} - e^{ibu}}{ihu} - e^{ibu}\right| \leqslant \frac{1}{2}|h||u| \tag{43}$$

$$\left|\frac{K(b+h) - K(b)}{h} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{k}(u)e^{ibu}\, du\right| \leqslant \frac{1}{2}|h| \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |\widehat{k}(u)||u|\, du \tag{44}$$

Donc K est une fonction dérivable et $K'(b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{k}(u)e^{ibu}\, du$. Comme on va appliquer plus bas l'inégalité des accroissements finis à K qui est à valeurs complexes, on fait la remarque additionnelle que cette dernière intégrale est une fonction Lipschitzienne de b (on a vu ce genre d'argument déjà) donc continue, ainsi K est de classe C^1. De plus par le Lemme crucial, l'intégrale représentant $K'(b)$ vaut :

$$K'(b) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \frac{2\sin(\Lambda(t-b))}{t-b}\, dt \tag{45}$$

Cependant $k(t)$ est nul pour $-A \leqslant t \leqslant A$. Et pour $|t| > A$, on a $|t-b| > \frac{1}{2}A$, tandis que le sinus est majoré par 1, donc

$$b \in [-\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}A] \implies |K'(b)| \leqslant \int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{\infty} |f(t)| \frac{4}{A}\, dt \leqslant \frac{4}{A}\epsilon \qquad \text{par la condition (2) sur A} \tag{46}$$

Par l'inégalité des accroissements finis on obtient

$$|K(b)| = |K(b) - K(a)| \leqslant |b-a| \frac{4}{A}\epsilon \leqslant 4\epsilon \tag{47}$$

Si maintenant on exprime $\widehat{f}(u)$ sous la forme $\widehat{g}(u) + \widehat{k}(u)$, on en déduit :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{f}(u) \frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu} \, du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{g}(u) \frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu} \, du \right| \leqslant 4\epsilon \tag{48}$$

Par le fait que g est de carré intégrable et la proposition 3 il existe Λ_0 tel que pour $\Lambda \geqslant \Lambda_0$ on ait :

$$\left| \int_a^b g(t) \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{g}(u) \frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu} \, du \right| \leqslant \epsilon \tag{49}$$

Donc, comme $\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b g(t) \, dt$, on a l'implication :

$$\Lambda \geqslant \Lambda_0 \implies \left| \int_a^b f(t) \, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{f}(u) \frac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu} \, du \right| \leqslant 5\epsilon \tag{50}$$

et le Théorème d'inversion de Lévy (pour les fonctions de $\mathcal{R}^1$) est démontré. □

Ce Théorème d'inversion est plus utile que le théorème d'inversion ponctuelle sous les conditions de Dirichlet, car par exemple, si $\widehat{f}$ est identiquement nulle, il nous donne sans aucune autre hypothèse que $\int_a^b f(t) \, dt$ est toujours nul, ce qui par différentes méthodes permet de voir que f est « presque partout » nulle. [10]

D'une manière générale remplacer la fonction $f(t)$ par la fonction de deux variables $\int_a^b f(t) \, dt$ est un point de vue très profond, déjà initié par Riemann, et dont aujourd'hui on peut voir la descendance en Analyse fonctionnelle ou en Théorie des distributions.

10 Deuxième théorème d'inversion ponctuelle

En tout point de continuité on a $f(t_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t) \, dt$ et donc par la formule d'inversion de Lévy on peut reconstruire $f(t_0)$ à partir des valeurs de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ par une double limite. Il existe aussi une formule ne nécessitant qu'une seule limite, comme pour la formule d'inversion standard, mais sans l'hypothèse de dérivabilité des conditions « de Dirichlet ».

Théorème 6. *Soit $f \in \mathcal{R}^1$. En tout point t_0 où il existe des limites à droite et à gauche, on a :*

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \lim_{\Lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} (1 - \frac{|u|}{\Lambda}) \widehat{f}(u) e^{+iut_0} \, du \tag{51}$$

10. par exemple on observe que $\int_x^y f(t)\varphi(t) \, dt = 0$ pour toute fonction en escalier φ, et on prend des φ tendant en norme $\|\cdot\|_1$ (ou plutôt $\|\cdot\|_2$) vers $\overline{f}$ sur $[x, y]$ pour obtenir $\int_x^y |f(t)|^2 \, dt = 0$.

Le résultat va être déduit du Lemme suivant :

Lemme 3. *Soit $f \in \mathcal{R}^1$. Pour tout $\Lambda > 0$, on a*

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} (1 - \frac{|u|}{\Lambda}) \widehat{f}(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx \tag{52}$$

J'admets pour le moment le Lemme et je prouve le Théorème. Remarquons que la fonction $u \mapsto \widehat{f}(u) e^{+iut_0}$ est en fait la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto f(t_0 + t)$, donc pour démontrer le Théorème on pourra aussi bien remplacer f par $f(t_0 + t)$ et supposer que t_0 vaut 0. Il s'agit donc en fait, d'après le Lemme, de calculer la limite pour $\Lambda \to +\infty$ des intégrales

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} (f(x) + f(-x)) \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx\ , \tag{53}$$

lorsque, par hypothèse, il existe $f(0^+)$ et $f(0^-)$ et donc $\lim_{x \to 0^+} (f(x) + f(-x)) = f(0^+) + f(0^-)$.

On remarque d'abord, par le changement de variable $y = \Lambda \frac{1}{2} x$, que $\int_0^\infty \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx$ ne dépend pas de Λ et vaut

$$C := \int_{0}^{\infty} \frac{2 \sin^2(y)}{y^2}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}\, dy \tag{54}$$

Or $2 \frac{\sin(u)}{u} = \int_{-1}^{1} e^{-itu} dt$, donc par la formule de Plancherel, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 4 \frac{\sin^2(u)}{u^2}\, du = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$:

$$C = \int_{0}^{\infty} \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx = \pi \tag{55}$$

Soit $\eta > 0$. Majorons :

$$\int_{\eta}^{\infty} (|f(x)| + |f(-x)|) \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx \leqslant \frac{4}{\Lambda} \eta^{-2} \int_{\eta}^{\infty} (|f(x)| + |f(-x)|)\, dx \leqslant \frac{4}{\Lambda} \frac{\|f\|_1}{\eta^2} \tag{56}$$

Par ailleurs :

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{4 \sin^2(\Lambda \frac{1}{2} x)}{\Lambda x^2}\, dx \leqslant \frac{4}{\Lambda} \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{4}{\Lambda \eta} \tag{57}$$

Si l'on pose

$$g(x) := f(x) + f(-x) - f(0^+) - f(0^-)\ , \tag{58}$$

on a donc, pour tout $\eta > 0$:

$$\int_{\eta}^{\infty} |g(x)| \frac{4\sin^2(\Lambda \frac{1}{2}x)}{\Lambda x^2}\, dx \leqslant \frac{4}{\Lambda} \frac{\|f\|_1}{\eta^2} + \frac{4(|f(0^+)| + |f(0^-)|)}{\Lambda \eta} . \tag{59}$$

On choisit $\eta > 0$ de sorte que $|g(x)| \leqslant \epsilon$ pour $0 < x \leqslant \eta$. On a alors

$$\int_{0}^{\eta} |g(x)| \frac{4\sin^2(\Lambda \frac{1}{2}x)}{\Lambda x^2}\, dx \leqslant \epsilon \int_{0}^{\eta} \frac{4\sin^2(\Lambda \frac{1}{2}x)}{\Lambda x^2}\, dx \leqslant \epsilon\pi \tag{60}$$

Au total, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\left| \int_{0}^{\infty} (f(x) + f(-x)) \frac{4\sin^2(\Lambda \frac{1}{2}x)}{\Lambda x^2}\, dx - \pi(f(0^+) + f(0^-)) \right| \\ &\qquad = \left| \int_{0}^{\infty} g(x) \frac{4\sin^2(\Lambda \frac{1}{2}x)}{\Lambda x^2}\, dx \right| \leqslant \epsilon\pi + \frac{4}{\Lambda} \frac{\|f\|_1}{\eta^2} + \frac{4(|f(0^+)| + |f(0^-)|)}{\Lambda \eta} \end{aligned} \tag{61}$$

Pour Λ suffisamment grand le terme de droite devient plus petit que $\epsilon\pi + \epsilon\pi = 2\pi\epsilon$, et par conséquent grâce au Lemme 3 :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} (1 - \frac{|u|}{\Lambda}) \widehat{f}(u)\, du - \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} \right| \leqslant \epsilon , \tag{62}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il s'agit maintenant de prouver le Lemme 3. Cela va être assez rusé puisque nous ne savons pas intervertir les intégrales ! L'idée de base est pourtant très simple en partant de la formule du « Lemme crucial » 1, pour $t_0 = 0$, avec y à la place de Λ :

$$\int_{-y}^{y} \widehat{f}(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2\sin(xy)}{x}\, dx \tag{63}$$

Désignons par $\mathrm{A}(y)$ la valeur commune de cette identité. L'expression de gauche montre que A est une fonction continue, et même C^1 de la variable y avec $\mathrm{A}'(y) = \widehat{f}(y) + \widehat{f}(-y)$. L'idée est de calculer de deux manières $\int_0^y \mathrm{A}(w)\, dw$. Un calcul formel partant de l'intégrale infinie suggère que le résultat de cette intégration est :

$$\mathrm{B}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2(1 - \cos(xy))}{x^2}\, dx \tag{64}$$

On observe que $\frac{1-\cos(xy)}{x^2} = 2\sin^2(\frac{1}{2}xy)x^{-2} \leqslant \frac{1}{2}y^2$ donc l'intégrale définissant B(y) est bien absolument convergente. On va directement prouver que B(y) est dérivable et donner la valeur de B′(y). Pour cela, par la formule de Taylor-Lagrange on a la majoration générale, pour a, b réels :

$$|\cos(a+b) - \cos(a) + b\sin(a)| = |\frac{1}{2}b^2\cos(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}b^2 \tag{65}$$

Il en résulte, pour tout $h \neq 0$, tout y, et tout x ($x = 0$ est obtenu comme une limite) : :

$$\left|\frac{\cos(xy+xh) - \cos(xy)}{hx^2} + \frac{\sin(xy)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2}|h| \tag{66}$$

Et par conséquent

$$\left|\frac{\mathrm{B}(y+h) - \mathrm{B}(y)}{h} - \mathrm{A}(y)\right| \leqslant |h| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx\ , \tag{67}$$

ce qui prouve que B(y) est dérivable avec B′(y) = A(y). Comme B(0) = 0, on a, pour $y > 0$,

$$\mathrm{B}(y) = \int_0^y \mathrm{A}(u)\,du = [(u-y)\mathrm{A}(u)]_0^y + \int_0^y (y-u)\mathrm{A}'(u)\,du \tag{68}$$

$$= \int_0^y (y-u)(\widehat{f}(u) + \widehat{f}(-u))\,du = \int_{-y}^y (y-|u|)\widehat{f}(u)\,du \tag{69}$$

Finalement

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} (\Lambda - |u|)\,\widehat{f}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2(1-\cos(\Lambda x))}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{4\sin^2(\Lambda\frac{1}{2}x)}{x^2}\,dx \tag{70}$$

et ceci conclut la preuve du Lemme 3.

11 Un complément à la formule de Plancherel

Théorème 7. *Soit $f \in \mathcal{R}^1$ qui n'est* pas *dans $\mathcal{R}^2$:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = +\infty \tag{71}$$

Alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ n'est elle non plus pas *dans* $\mathcal{R}^2$ *:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(u)|^2 \, du = +\infty \tag{72}$$

Preuve. Soit donc $f \in \mathcal{R}^1$ qui n'est pas dans $\mathcal{R}^2$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\|\widehat{f}\|_2 = C < \infty$. Soit $\varphi(t)$ la fonction qui vaut 1 pour $a < t < b$ et zéro ailleurs. La formule de Lévy peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\varphi(t)} \, dt = \lim_{\Lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{\varphi}(u)} \, du \tag{73}$$

Elle reste valable sous cette forme pour toutes les fonctions en escaliers φ, car ce sont des combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'intervalles. Or par Cauchy-Schwarz, le membre de droite de (73) a un module complexe majoré par $(2\pi)^{-1}\|\widehat{f}\|_2\|\widehat{\varphi}\|_2 = (\sqrt{2\pi})^{-1}C\,\|\varphi\|_2$, majoration qui s'applique donc aussi au terme de gauche de (73).

Soit $\epsilon > 0$. Notons f_n la fonction égale à f sur $[n, n]$ et à zéro ailleurs. Soit φ une fonction en escalier à support dans $[n, n]$ et vérifiant $\|f_n - \varphi\|_2 \leqslant \epsilon$. On a alors aussi $\|\varphi\|_2 \leqslant \|f_n\|_2 + \epsilon$. Par Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{-n}^{n} f(t)\overline{f(t)} \, dt - \int_{-n}^{n} f(t)\overline{\varphi(t)} \, dt \right| \leqslant \|f_n\|_2 \|f_n - \varphi\|_2 \leqslant \epsilon \|f_n\|_2 \tag{74}$$

donc

$$\int_{-n}^{n} |f(t)|^2 \, dt \leqslant \epsilon\|f_n\|_2 + (\sqrt{2\pi})^{-1}C\|\varphi\|_2 \leqslant ((\sqrt{2\pi})^{-1}C + \epsilon)\|f_n\|_2 + (\sqrt{2\pi})^{-1}C\epsilon \tag{75}$$

On passe à la limite pour $\epsilon \to 0$ ce qui donne :

$$\|f_n\|_2{}^2 = \int_{-n}^{n} |f(t)|^2 \, dt \leqslant (\sqrt{2\pi})^{-1}C\,\|f_n\|_2, \qquad \text{donc} \quad \|f_n\|_2 \leqslant (\sqrt{2\pi})^{-1}C\,. \tag{76}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-n}^{n} |f(t)|^2 \, dt \leqslant (2\pi)^{-1}C^2$ et par conséquent $f \in \mathcal{R}^2$, ce qu'il fallait démontrer. □

La preuve de ce Théorème illustre l'utilité de la formule d'inversion de Lévy, en comparaison avec les formules d'inversion ponctuelle, qui sont d'un maniement délicat, et nécessitent des conditions supplémentaires.

On peut donc énoncer la formule de Plancherel en disant que l'on a toujours $\|f\|_2 = (\sqrt{2\pi})^{-1}\|\widehat{f}\|_2$ même si l'un des termes est infini.