Normes Lp

Où l'on trouvera une discussion assez complète des normes Lp (éventuellement avec poids) sur $\mathbf{R}^N$, et une évocation de la situation analogue avec des intégrales sur un espace mesuré, qui en est d'ailleurs une généralisation.

Jean-François Burnol, 4 mars 2010

1 Hölder pour $\mathbf{R}^N$

1.1 Convexité

Un point de départ possible est la convexité de l'exponentielle, ou de manière équivalente la concavité du logarithme.

Soit $u, v > 0$ et $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. On peut majorer le produit uv de la manière suivante :

$$uv = e^{\log(u)+\log(v)} = e^{\alpha\frac{\log(u)}{\alpha}+\beta\frac{\log(v)}{\beta}} \leq \alpha e^{\frac{\log(u)}{\alpha}} + \beta e^{\frac{\log(v)}{\beta}} = \alpha u^{\frac{1}{\alpha}} + \beta v^{\frac{1}{\beta}}$$

Il est plus commode d'exprimer cela avec $p = \frac{1}{\alpha} > 1$ et $q = \frac{1}{\beta} > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On dit que (p, q) est une paire d'exposants conjugués. Nous avons donc prouvé :

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \,, \tag{1}$$

qui est notre inégalité de base. On y avait $u > 0$ et $v > 0$, mais si on regarde on voit que l'inégalité reste valable pour $u = 0$ ou $v = 0$. Elle est même valable si $u = +\infty$ ou $v = +\infty$, avec les définitions $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ et $\infty \cdot \infty = \infty$, et $\infty \cdot x = \infty$ pour $x > 0$.

Notons au passage que l'exponentielle étant strictement convexe, l'inégalité 1, pour $0 < u, v < \infty$ est en fait stricte sauf si $\frac{1}{\alpha}\log(u) = \frac{1}{\beta}\log(v)$, soit encore $u^p = v^q$. Et si $u = 0$ l'inégalité est stricte sauf si $v = 0$ aussi, et réciproquement. Donc l'inégalité 1, pour $0 \leq u, v < \infty$, est une égalité si et seulement si $u^p = v^q$.

1.2 Hölder

Soit maintenant $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et $y = (y_1, \ldots, y_N)$. De 1 résulte :

$$\sum_{1\leq i\leq N} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\sum_{1\leq i\leq N} |x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{1\leq i\leq N} |y_i|^q \tag{2}$$

Posons les définitions :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1\leq i\leq N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \|y\|_q = \left(\sum_{1\leq i\leq N} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

Il y a clairement : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda \mathbf{x}\|_p = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_p$. Et aussi $\mathbf{x} = 0 \iff \|\mathbf{x}\|_p = 0$. Dans l'équation (2) supposons $\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_q = 1$. On obtient :

$$\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_q = 1 \implies \sum_{1 \le i \le N} |x_i y_i| \le 1 \tag{4}$$

Si maintenant $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs non nuls quelconques on a

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p} \mathbf{x} \right\|_p = 1 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{\|\mathbf{y}\|_q} \mathbf{y} \right\|_q = 1$$

Donc par (4) :

$$\sum_{1 \le i \le N} \frac{|x_i y_i|}{\|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q} \le 1$$

Au final on a obtenu l'inégalité de Hölder :

$$\left| \sum_{1 \le i \le N} x_i y_i \right| \le \sum_{1 \le i \le N} |x_i y_i| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \tag{5}$$

Nous l'avons prouvée pour $\mathbf{x} \neq 0$ et $\mathbf{y} \neq 0$ mais elle reste évidemment vraie si l'un ou l'autre des deux vecteurs est nul.

Cas d'égalités $\sum_{1 \le i \le N} |x_i y_i| = \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$: il y a égalité si $\mathbf{x} = 0$ ou $\mathbf{y} = 0$. Sinon s'il y a égalité pour le couple $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ il y a égalité pour n'importe quel couple $(\lambda \mathbf{x}, \mu \mathbf{y})$ on peut donc supposer $\|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_q = 1$. Dans ce cas :

$$1 = \sum_{1 \le i \le N} |x_i y_i| \le \frac{1}{p} \sum_{1 \le i \le N} |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{1 \le i \le N} |y_i|^q = 1$$

Donc il faut $\forall i \ |x_i y_i| = \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$, ce qui n'est réalisé que pour $|x_i|^p = |y_i|^q$. Au final, il y a égalité si et seulement si les vecteurs $|\mathbf{x}|^p = (|x_1|^p, \ldots, |x_N|^p)$ et $|\mathbf{y}|^q = (|y_1|^q, \ldots, |y_N|^q)$ sont proportionnels.

Si on veut de plus $|\sum_{1 \le i \le N} x_i y_i| = \sum_{1 \le i \le N} |x_i y_i|$ il est nécessaire et suffisant que tous les $x_i y_i$ soient du même signe.

Théorème 1. *Pour toute paire (p, q) d'exposants conjugués et deux vecteurs quelconques $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^N$ on a l'inégalité de Hölder :*

$$\left| \sum_{1 \le i \le N} x_i y_i \right| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$

Il y a égalité si et seulement si $x_i y_i$ est de signe constant et si $|\mathbf{x}|^p$ et $|\mathbf{y}|^q$ sont proportionnels.

1.3 Hölder avec poids

Soit $\mu = (m_1, \dots, m_N)$ des poids positifs ou nuls. Posons :

$$\|x\|_{p,\mu} = \left(\sum_{1 \le i \le N} |x_i|^p m_i \right)^{\frac{1}{p}}$$

Notons ϕ l'endomorphisme $\phi(x) = (m_1^{\frac{1}{p}} x_1, \dots, m_N^{\frac{1}{p}} x_N)$. On a donc $\|x\|_{p,\mu} = \|\phi(x)\|_p$. De même $\|y\|_{q,\mu} = \|\psi(y)\|_q$ avec $\psi(x) = (m_1^{\frac{1}{q}} y_1, \dots, m_N^{\frac{1}{q}} y_N)$.

$$\left| \sum_{1 \le i \le N} (\phi(x))_i (\psi(y))_i \right| \le \|\phi(x)\|_p \|\psi(y)\|_q = \|x\|_{p,\mu} \|y\|_{q,\mu}$$

ce qui, compte tenu de $m_i^{\frac{1}{p}} m_i^{\frac{1}{q}} = m_i$ nous donne :

Théorème 2. *On a :*

(6)
$$\left| \sum_{1 \le i \le N} x_i y_i m_i \right| \le \|x\|_{p,\mu} \|y\|_{q,\mu}$$

On remarquera que si l'on identifie le vecteur x avec la fonction $i \mapsto x_i$ sur l'ensemble $X = \{1, \dots, N\}$ il est naturel de considérer X comme un espace mesuré avec $\mu(\{i\}) = m_i$. L'inégalité de Hölder avec poids s'écrit alors sous la forme :

(7)
$$\forall x, y \qquad \left| \int_X x(t) y(t) d\mu(t) \right| \le \left(\int_X |x(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |y(t)|^q d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Cette inégalité, avec $x = f$ et $y = g$ deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (X, μ), et telles que les intégrales du terme de droite soient finies, vaut en toute généralité. En effet la majoration $|fg| \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q$ montre que fg est intégrable donc le terme de gauche a un sens. Si $\|f\|_p = 0$ (resp. $\|g\|_q = 0$) alors f (resp. g) est presque partout nulle donc fg aussi. Sinon par homogénéité on peut supposer $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ et il suffit alors d'intégrer $|fg| \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q$. Et pour ceux qui ne sont pas à l'aise avec l'intégration sur les espaces mesurés généraux, ils pourront relire ce paragraphe en ayant en tête les fonctions Riemann intégrables, ou même continues par morceaux, sur un intervalle de longueur finie.

2 Minkowski pour R^N

2.1 L'approche par dualité ($p > 1$)

Soit $p > 1$ et q son exposant conjugué.

Soient x et y dans R^N, non tous les deux nuls. Alors $z = |x| + |y| = (|x_i| + |y_i|)_i$ n'est pas nul. Nous prenons un vecteur non nul w tel que l'inégalité de Hölder pour z et w soit une égalité : il suffit pour cela que $z^p = |w|^q$, donc il suffit de prendre $w = z^{p/q} = z^{p-1} = ((|x_i| + |y_i|)^{p-1})_{1\leq i\leq N}$. Nous avons alors :

$$\sum_{1\leq i\leq N} z_i w_i = \sum_{1\leq i\leq N} (|x_i| + |y_i|)w_i = \|z\|_p \|w\|_q \tag{8}$$

$$\sum_{1\leq i\leq N} |x_i| w_i \leq \|x\|_p \|w\|_q \tag{9}$$

$$\sum_{1\leq i\leq N} |y_i| w_i \leq \|y\|_p \|w\|_q \tag{10}$$

En comparant et en utilisant $\|w\|_q > 0$, on obtient l'inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\|_p \leq \|\, |x| + |y|\, \|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{11}$$

Si $z = |x|+|y|$ est le vecteur nul, alors x et y sont nuls, et l'inégalité est bien sûr valable.

Cas d'égalités : vrai si $x = y = 0$. Et si $z = |x| + |y|$ n'est pas nul, il faut égalité dans (9) et (10) donc il faut que $|x|^p$ et $|y|^p$ soient des multiples de w^q, donc il faut que $|x|$ et $|y|$ soient proportionnels. Supposons $x \neq 0$ alors $|y| = t|x|$ avec $t \geq 0$. Si l'on veut de plus $\|x + y\|_p = \||x| + |y|\|_p$ alors cela exige $\forall i\ |x_i + y_i| = |x_i| + |y_i|$, donc x_i et y_i doivent avoir le même signe, et par conséquent $y_i = tx_i$. Au final $y = tx$ avec $t \geq 0$.

Il y a donc égalité dans

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{12}$$

si et seulement si x ou y est nul, ou $y = tx$ avec $t > 0$.

L'inégalité de Minkowski montre que $x \mapsto \|x\|_p$ est une norme sur R^N. Ceci est bien sûr aussi vrai pour $p = 1$. Attention cependant que pour l'égalité $\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ il suffit que x_i et y_i soient de même signe pour chaque i ce qui bien sûr est beaucoup moins restrictif que la proportionnalité de x et y. Sauf si $N = 1$ bien sûr auquel cas tous les $\|\cdot\|_p$ sont égaux à la valeur absolue sur R.

Maintenant que l'on sait que les $\|x\|_p$, $p > 1$, sont des normes sur R^N, on peut aussi relire la preuve précédente en considérant que l'on a associé à x la forme linéaire $w \mapsto L_x(w) = \sum_i x_i w_i$. On peut interpréter l'inégalité de Hölder (et sa saturation) via $\|x\|_p = \sup_{\|w\|_q\leq 1} |L_x(w)| = \|L_x\|$. On a $L_{x_1+x_2} = L_{x_1} + L_{x_2}$ et $\|L_{x_1+x_2}\| \leq \|L_{x_1}\| + \|L_{x_2}\|$ qui correspond à Minkowski.

2.2 Une autre approche et le cas $0 < p < 1$

Notre méthode de passer de Hölder à Minkowski par « dualité » est élégante mais ne nous donne pas la moindre idée de ce qui se passe si $p < 1$. Notons qu'à part $p = 0$

qui pose problème à cause de l'exposant $\frac{1}{p}$, on peut définir

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1\leq i\leq N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{13}$$

pour tout $p \in \mathbf{R}$. Si $p < 0$ il faut considérer lorsque $x_i = 0$ que $|x_i|^p$ vaut $+\infty$, donc la somme vaut $+\infty$ et la puissance $\frac{1}{p}$-eme vaut zéro. On est ainsi amené à définir $\|x\|_p$, lorsque $p < 0$, comme valant zéro dès que l'une des coordonnées s'annule.

Il s'agit de comparer $\|x + y\|_p$ avec $\|x\|_p + \|y\|_p$. La fonction $t \mapsto t^p$ sur $]0, +\infty[$ a comme dérivée seconde $p(p-1)t^{p-2}$. Ainsi t^p est strictement convexe pour $p > 1$ et $p < 0$ et est strictement concave pour $0 < p < 1$.

2.2.1 le cas $p > 1$

Nous prenons $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs non tous les deux nuls et à coordonnées positives ou nulles. Nous prenons $\alpha > 0$, $\beta > 0$, avec $\alpha + \beta = 1$ et écrivons :

$$(x_i + y_i)^p = (\alpha\frac{x_i}{\alpha} + \beta\frac{y_i}{\beta})^p \leq \alpha\frac{x_i^p}{\alpha^p} + \beta\frac{y_i^p}{\beta^p}$$

$$\sum_i (x_i + y_i)^p \leq \alpha\frac{\|x\|_p^p}{\alpha^p} + \beta\frac{\|y\|_p^p}{\beta^p} \tag{14}$$

Essayons avec $\alpha = \lambda\|x\|_p$ et $\beta = \lambda\|y\|_p$ il faut donc prendre

$$\lambda = \frac{1}{\|x\|_p + \|y\|_p}$$

Il vient :

$$\|x + y\|_p^p \leq \alpha\lambda^{-p} + \beta\lambda^{-p} = \lambda^{-p} = (\|x\|_p + \|y\|_p)^p \tag{15}$$

D'où l'inégalité de Minkowski ! C'est un peu miraculeux, mais pas tant que cela, car la si belle logique du point de départ devait forcément nous amener quelque part. La discussion des cas d'égalités peut aussi se faire à partir de cette preuve.

2.2.2 le cas $0 < p < 1$

La démonstration précédente pour $p > 1$ est particulièrement notable car en l'imitant on va voir ce qui se passe pour $0 < p < 1$. Ici encore $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont deux vecteurs non tous les deux nuls et à coordonnées positives ou nulles. Avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, avec $\alpha + \beta = 1$ on a :

$$(x_i + y_i)^p = (\alpha\frac{x_i}{\alpha} + \beta\frac{y_i}{\beta})^p \geq \alpha\frac{x_i^p}{\alpha^p} + \beta\frac{y_i^p}{\beta^p}$$

$$\sum_i (x_i + y_i)^p \geq \alpha \frac{\|x\|_p^p}{\alpha^p} + \beta \frac{\|y\|_p^p}{\beta^p}$$

Ici encore on prendra :

$$\alpha = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \qquad \beta = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$$

Il vient :

$$\|x+y\|_p^p \geq \alpha(\|x\|_p + \|y\|_p)^p + \beta(\|x\|_p + \|y\|_p)^p = (\|x\|_p + \|y\|_p)^p$$

D'où l'inégalité de Minkowski pour $0 < p < 1$:

(16) $$x, y \geq 0 \implies \|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Elle va dans l'autre sens ! ! La notation $x \geq 0$ signifie : $\forall i \quad x_i \geq 0$.

2.2.3 le cas $p < 0$

Ici on prend d'abord toutes les coordonnées strictement positives. Au début c'est exactement comme pour $p > 1$, puisque t^p est convexe lorsque $p < 0$.

$$(x_i + y_i)^p = (\alpha \frac{x_i}{\alpha} + \beta \frac{y_i}{\beta})^p \leq \alpha \frac{x_i^p}{\alpha^p} + \beta \frac{y_i^p}{\beta^p}$$

$$\sum_i (x_i + y_i)^p \leq \alpha \frac{\|x\|_p^p}{\alpha^p} + \beta \frac{\|y\|_p^p}{\beta^p}$$

$$\alpha = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p} \qquad \beta = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$$

$$\|x+y\|_p^p \leq \alpha(\|x\|_p + \|y\|_p)^p + \beta(\|x\|_p + \|y\|_p)^p = (\|x\|_p + \|y\|_p)^p$$

Attention maintenant car élever à la puissance $\frac{1}{p} < 0$ renverse les inégalités. Notre résultat est, comme pour $0 < p < 1$, une minoration et non pas une majoration :

$$p < 0 \quad x, y \geq 0 \implies \|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Pour l'instant nous avons prouvé cela pour $x > 0$, $y > 0$. Supposons que l'une des coordonnées du vecteur x s'annule. Donc $\|x\|_p = 0$. Par ailleurs $(x_i + y_i)^p \leq y_i^p$ pour chaque i, donc $\|x+y\|_p^p \leq \|y\|_p^p$ donc $\|x+y\|_p \geq \|y\|_p$. Donc $\|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p$. Cela complète la démonstration.

2.3 La Totale sur les majorations et minorations de $\|x+y\|_p$

Nous avons vu que pour $0 < p < 1$ on a :

$$x, y \geq 0 \implies \|x+y\|_p \geq \|x\|_p + \|y\|_p$$

L'ennui c'est que cela nous est de peu d'utilité lorsque l'on veut faire de l'algèbre linéaire. Essayons donc tout de même de majorer $\|x+y\|_p$.

Tout d'abord si u, v sont deux réels positifs, il est certainement possible de majorer $(u+v)^p$ par un multiple de $u^p + v^p$, il s'agit pour cela d'étudier la fonction $t \mapsto f(t) = \frac{(1+t)^p}{1+t^p}$ pour $t \geq 0$. Elle tend vers 1 à l'infini et vaut 1 en zéro, elle est continue, donc elle est bornée. On calcule

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{p}{1+t} - \frac{pt^{p-1}}{1+t^p} = p\frac{1-t^{p-1}}{(1+t)(1+t^p)}$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1, \infty[$ (c'est l'inverse si $p > 1$). On a donc $(1+t)^p < 1 + t^p$ pour $t > 0$ et par conséquent

$$u, v \geq 0 \implies (u+v)^p \leq u^p + v^p$$

On a donc effectivement une majoration :

$$\forall x, y \in R^N \qquad \|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p \tag{17}$$

En utilisant la convexité de $t^{\frac{1}{p}}$: $(\frac{1}{2}\|x\|_p^p + \frac{1}{2}\|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2}(\|x\|_p + \|y\|_p)$ il vient finalement :

$$\forall x, y \in R^N \qquad \|x+y\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|x\|_p + \|y\|_p) \tag{18}$$

L'inégalité est saturée pour $N \geq 2$ en prenant $x = (1, 0, 0, \dots)$ et $y = (0, 1, 0, \dots)$.

La situation pour $0 < p < 1$ est donc :

Théorème 3. *Pour* $0 < p < 1$ *:*

$$\forall x, y \in R^N \qquad \|x\|_p + \|y\|_p \leq \|\, |x| + |y| \,\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|x\|_p + \|y\|_p)$$

On a aussi : $\forall x, y \quad \|x+y\|_p \leq \|\, |x| + |y| \,\|_p$.

Reprenons le raisonnement avec $f(t) = \frac{(1+t)^p}{1+t^p}$ lorsque $p > 1$. Ici f est d'abord croissante puis décroissante et donc :

$$p > 1, u, v \geq 0 \implies (u+v)^p \geq u^p + v^p$$

On a alors une minoration :

$$\forall x, y \in R^N \qquad \|\, |x| + |y| \,\|_p^p \geq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p \tag{19}$$

En utilisant la concavité de $t^{\frac{1}{p}}$: $(\frac{1}{2}\|x\|_p^p+\frac{1}{2}\|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2}(\|x\|_p+\|y\|_p)$ il vient finalement :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N \qquad \|\,|x|+|y|\,\|_p \geq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|x\|_p+\|y\|_p) \tag{20}$$

La minoration est atteinte, lorsque $N \geq 2$, par les vecteurs $x = (1, 0, 0, \dots)$ et $y = (0, 1, 0, \dots)$.

La situation complète pour $p > 1$ est donc :

Théorème 4. *Pour* $p > 1$ *:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N \qquad 2^{\frac{1}{p}-1}(\|x\|_p+\|y\|_p) \leq \|\,|x|+|y|\,\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$$

On a aussi : $\forall x, y \quad \|x+y\|_p \leq \|\,|x|+|y|\,\|_p$. *L'application* $\mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$, $x \mapsto \|x\|_p$ *est une norme.*

Et pour $p < 0$, une majoration de $\|x+y\|_p$ par un multiple de $\|x\|_p+\|y\|_p$ est-elle possible ? non, dès que $N \geq 2$. En effet il suffit de prendre x et y à coordonnées positives, avec chacun au moins une coordonnée nulle, mais tels que $x+y$ a toutes ses coordonnées non nulles, alors $\|x\|_p+\|y\|_p = 0$ mais $\|x+y\|_p > 0$.

2.4 Minkowski avec poids

Soit $\mu = (m_1, \dots, m_N)$ des poids positifs ou nuls. On a défini :

$$\|x\|_{p,\mu} = \left(\sum_{1\leq i\leq N} |x_i|^p m_i\right)^{\frac{1}{p}}$$

Avec $\phi(x) = (m_1^{\frac{1}{p}} x_1, \dots, m_N^{\frac{1}{p}} x_N)$ on a $\|x\|_{p,\mu} = \|\phi(x)\|_p$. Comme ϕ est linéaire et que de plus $|\phi(x)| = \phi(|x|)$, les inégalités démontrées plus haut pour $\|\cdot\|_p$ sont valables pour $\|\cdot\|_{p,\mu}$.

Théorème 5. *Suivant la valeur de* $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *on a pour* x *et* y *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^N$ *:*

1. *si* $p > 1$ *:*
$$2^{\frac{1}{p}-1}(\|x\|_{p,\mu}+\|y\|_{p,\mu}) \leq \|\,|x|+|y|\,\|_{p,\mu} \leq \|x\|_{p,\mu}+\|y\|_{p,\mu}$$
2. *si* $p = 1$ *:* $\|x\|_{1,\mu}+\|y\|_{1,\mu} = \|\,|x|+|y|\,\|_{1,\mu}$,
3. *si* $0 < p < 1$ *:*
$$\|x\|_{p,\mu}+\|y\|_{p,\mu} \leq \|\,|x|+|y|\,\|_{p,\mu} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|x\|_{p,\mu}+\|y\|_{p,\mu})$$
4. *si* $p < 0$ *:* $\|x\|_{p,\mu}+\|y\|_{p,\mu} \leq \|\,|x|+|y|\,\|_{p,\mu}$
5. *pour tous les* p *:* $\|x+y\|_{p,\mu} \leq \|\,|x|+|y|\,\|_{p,\mu}$.

Je laisse la discussion des cas d'égalités au lecteur intéressé. Par ailleurs, plutôt que d'utiliser $\|x\|_{p,\mu} = \|\phi(x)\|_p$, on aurait pu refaire toutes les preuves directement : c'est à conseiller si l'on veut voir ce qu'il faut faire plus généralement pour $\|f\|_p = (\int_X |f(t)|^p \, d\mu(t))^{\frac{1}{p}}$, avec (X, μ) un espace mesuré (par exemple un intervalle réel).

3 Comparaison des normes Lp sur $\mathbb{R}^N$

On se limitera dorénavant à $p > 0$.

3.1 Les normes standard [1]

Pour $x \in \mathbb{R}^N$ fixé, non nul, la formule

$$\|x\|_p = \left(\sum_{1\le i\le N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{1}{p}\log \sum_{1\le i\le N} |x_i|^p\right)$$

montre que $\|x\|_p$ est une fonction de classe C^∞ de $p > 0$ (et pour $x = 0$, $\|x\|_p = 0$). Définissons également

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \tag{21}$$

L'encadrement immediat

$$\max_i |x_i| \le \left(\sum_{1\le i\le N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le N^{\frac{1}{p}} \max_i |x_i|$$

donne :

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

En ce qui concerne $p \to 0$, si x a au plus une seule coordonnée non nulle alors $\|x\|_p$ est constant, tandis que si x a au moins deux coordonnées non nulles alors on a une minoration du type $\|x\|_p \ge (2a^p)^{\frac{1}{p}}$ avec $a > 0$, donc $\lim_{p\to 0} \|x\|_p = +\infty$.

Supposons $p > q > 0$ (ici p et q ne sont pas conjugués ils sont quelconques), et $\|x\|_q = 1$. Alors

$$\sum_i |x_i|^q = 1 \implies \forall i\ |x_i|^q \le 1 \implies \forall i\ |x_i|^p = (|x_i|^q)^{p/q} \le |x_i|^q \implies \sum_i |x_i|^p \le 1$$

Donc $\|x\|_p \le 1$. Si maintenant $x \neq 0$ est quelconque on applique ce qui précède à $x' = \frac{1}{\|x\|_q} x$ et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad p > q > 0 \implies \|x\|_p \le \|x\|_q$$

Ces inégalités sont des égalités lorsque x a au plus une coordonnée non nulle (dans le cas contraire ce sont des inégalités strictes).

1. l'accord de «standard» comme adjectif est délicat, puisqu'on ne le met jamais au féminin mais parfois au masculin pluriel «standards». Le mot norme étant féminin j'ai reculé devant «normes standards».

Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, on va majorer $\sum_i |x_i|^q$ en utilisant l'inégalité de Hölder avec exposants conjugués $P = \frac{p}{q} > 1$ et $Q = \frac{P}{P-1} = \frac{p}{p-q}$:

$$\sum_i |x_i|^q \cdot 1 \leq \left(\sum_i (|x_i|^q)^P\right)^{\frac{1}{P}} \left(\sum_i 1^Q\right)^{\frac{1}{Q}} = \|x\|_p^{\frac{p}{P}} N^{\frac{1}{Q}} = \|x\|_p^q N^{1-\frac{q}{p}}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad p > q > 0 \implies \|x\|_q \leq \|x\|_p N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

L'inégalité est saturée en prenant $x = (1, 1, \ldots, 1)$.

On a prouvé :

Théorème 6. *Soit $p > q > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$. On a $\|x\|_q N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \|x\|_p \leq \|x\|_q$ et ces inégalités sont optimales. En particulier les normes $\|x\|_p$, $p \geq 1$ sont équivalentes. On a :* $\lim_{p\to\infty} \|x|_p = \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

Ainsi, la fonction $p \mapsto \|x\|_p N^{-\frac{1}{p}}$ est une fonction croissante de $p > 0$, de limite $\|x\|_\infty$ pour $p \to \infty$, tandis que la fonction $p \mapsto \|x\|_p$ est elle une fonction décroissante de $p > 0$, elle aussi de limite $\|x\|_\infty$ pour $p \to \infty$.

Attention, ce dernier comportement est une spécificité particulière aux $\mathbb{R}^N$ munis des $\|\cdot\|_p$ standards, tandis que le premier comportement est lui typique des $\|\cdot\|_p$ sur les fonctions sur un espace mesuré (X, μ) de masse totale $\mu(X) < \infty$ (et $\mu(X)$ joue le rôle de N, puisque l'on peut voir $\mathbb{R}^N$ comme l'espace des fonctions sur l'ensemble fini $X = \{1, \ldots, N\}$ avec $\mu(A) = \#A$ et donc $\mu(X) = N$).

Comme $p \mapsto f(p) = \|x\|_p N^{-\frac{1}{p}}$ est une fonction croissante positive il existe $f(0^+) = \lim_{p\to 0} f(p)$. Supposons que x a $M \leq N$ coordonnées non nulles, que sans réelle perte de généralité, nous pouvons supposer être les M premières. Alors

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^p &= \sum_{1\leq i\leq M} e^{p\log|x_i|} = M + p\sum_{i\leq M}\log|x_i| + \mathcal{O}(p^2)\\
\log\|x\|_p &= \frac{1}{p}\log(M) + \frac{1}{M}\sum_{i\leq M}\log|x_i| + \mathcal{O}(p)\\
\log f(p) &= = \frac{1}{p}\log\frac{M}{N} + \frac{1}{M}\sum_{i\leq M}\log|x_i| + \mathcal{O}(p)
\end{aligned}$$

Donc, si $M < N$ on a $\lim \log f(p) = -\infty$, et $f(0^+) = 0$, tandis que pour $M = N$ on a $\lim \log f(p) = \frac{1}{N}\sum_{i\leq N}\log|x_i|$ et $f(0^+) = (|x_1|\cdots|x_N|)^{\frac{1}{N}}$. Cette dernière formule donne le bon résultat si l'une des coordonnées s'annule. En conclusion :

Théorème 7. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $p > 0$ on a*

$$(|x_1|\cdots|x_N|)^{\frac{1}{N}} \leq N^{-\frac{1}{p}}\|x\|_p$$

et le membre de droite décroît avec p lorsque celui-ci tend vers zéro et tend vers le membre de gauche qui est la «moyenne géométrique» de $|x|$.

Pour $p = 1$ on retrouve l'inégalité arithmético-géométrique. Notons qu'en prenant la limite pour $p \to 0$ des inégalités de Minkowski (16) valables pour $0 < p < 1$ on obtient un résultat intéressant, la sur-additivité de la moyenne géométrique :

Théorème 8. *Pour $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N \geq 0$ on a*

$$(x_1 \cdots x_N)^{\frac{1}{N}} + (y_1 \cdots y_N)^{\frac{1}{N}} \leq ((x_1 + y_1) \cdots (x_N + y_N))^{\frac{1}{N}}$$

3.2 Normes avec poids

Ici on a des poids $\mu = (m_1, \dots, m_N)$ positifs ou nuls avec $m_1 + \cdots + m_N > 0$, et $\|x\|_{p,\mu} = \left(\sum_{1\leq i\leq N} |x_i|^p m_i\right)^{\frac{1}{p}}$. Nous avons établi l'inégalité de Hölder dans ce contexte donc notre démonstration de $p > q > 0 \implies \|x\|_q \leq \|x\|_p N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ se recopie à l'identique et donne :

Théorème 9. *Soit $x \in R^N$. La fonction $p \mapsto (\sum m_i)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{p,\mu}$ est une fonction croissante de $p > 0$:*

$$p > q > 0 \implies \|x\|_{q,\mu}(m_1 + \cdots + m_N)^{-\frac{1}{q}} \leq \|x\|_{p,\mu}(m_1 + \cdots + m_N)^{-\frac{1}{p}} \tag{22}$$

La limite pour $p \to \infty$ est égale à $\|x\|_{\infty,\mu}$, ce dernier étant défini par $\|x\|_{\infty,\mu} = \max_{i,m_i>0} |x_i|$.

On notera que 22 est saturée pour $x = (1, \dots, 1)$.

En ce qui concerne la limite pour $p \to \infty$, soit I un indice avec $|x|_I = \max_{i,m_i>0} |x_i|$. Alors :

$$|x|_I \left(\frac{m_I}{m_1 + \cdots + m_N}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\sum_{1\leq i\leq N} |x_i|^p m_i}{m_1 + \cdots + m_N}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{i,m_i>0} |x_i|$$

donne effectivement $\lim_{p\to\infty} \|x\|_{p,\mu} = \max_{i,m_i>0} |x_i| = \|x\|_{\infty,\mu}$.

Examinons maintenant la limite pour $p \to 0$. Dorénavant je supposerai que tous les poids sont strictement positifs, pour éviter des complications un peu bêtes. Soit $C = m_1 + \cdots + m_N$. On recopie ce que nous avons fait avec les $m_i = 1$ (et $C = N$). Posons $f(p) = (\sum m_i)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{p,\mu}$. Supposons que x a $M \leq N$ coordonnées non nulles, que sans réelle perte de généralité, nous pouvons supposer être les M premières. Alors

$$\begin{aligned}
\|x\|_{p,\mu}^p &= \sum_{i\leq M} m_i e^{p \log|x_i|} = \sum_{i\leq M} m_i + p \sum_{i\leq M} m_i \log|x_i| + \mathcal{O}(p^2) \\
\log \|x\|_p &= \frac{1}{p} \log(\sum_{i\leq M} m_i) + \frac{1}{\sum_{i\leq M} m_i} \sum_{i\leq M} m_i \log|x_i| + \mathcal{O}(p) \\
\log f(p) &= = \frac{1}{p} \log \frac{\sum_{i\leq M} m_i}{C} + \frac{1}{\sum_{i\leq M} m_i} \sum_{i\leq M} m_i \log|x_i| + \mathcal{O}(p)
\end{aligned}$$

Donc, si $M < N$ on a $\lim \log f(p) = -\infty$, et $f(0^+) = 0$, tandis que pour $M = N$ on a $\lim \log f(p) = \frac{1}{C}\sum_{i\leq N} m_i \log |x_i|$ et $f(0^+) = (|x_1|^{m_1}\cdots|x_N|^{m_N})^{\frac{1}{C}}$. Cette dernière formule donne le bon résultat si l'une des coordonnées s'annule. En conclusion :

Théorème 10. *Pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, $p > 0$ et poids $m_i > 0$, on a*

$$(|x_1|^{m_1}\cdots|x_N|^{m_N})^{\frac{1}{\sum_i m_i}} \leq (\sum_i m_i)^{-\frac{1}{p}} \|x\|_{p,\mu}$$

et le membre de droite décroît avec p lorsque celui-ci tend vers zéro et tend vers le terme de gauche de l'inégalité.

On notera que pour $p = 1$ cela donne : $(|x_1|^{m_1}\cdots|x_N|^{m_N})^{\frac{1}{\sum_i m_i}} \leq \frac{\sum_i m_i|x_i|}{\sum_i m_i}$ qui exprime la concavité du logarithme ou la convexité de l'exponentielle.

On peut se poser la question de $\lim_{p\to 0}\|x\|_{p,\mu}$ sans le terme $C^{-\frac{1}{p}}$. Supposons d'abord que x a ses coordonnées toutes non-nulles. Si $C = m_1 + \cdots + m_N$ est > 1 on a la minoration $\|x\|_{p,\mu} \geq C^{\frac{1}{p}} a$ avec $a = \inf |x_i| > 0$, et donc la limite est $+\infty$. Si $C < 1$ on a $\|x\|_{p,\mu} \leq C^{\frac{1}{p}} b$ avec $b = \sup |x_i|$ et la limite est 0. Si $C = 1$, alors $\|x\|_{p,\mu} = C^{-\frac{1}{p}}\|x\|_{p,\mu}$ et a pour limite $|x_1|^{m_1}\cdots|x_N|^{m_N}$. Dans le cas général où x peut avoir des coordonnées nulles, la réponse dépend donc uniquement de la valeur de $C(x) = \sum_{i,x_i\neq 0} m_i$. Si $C(x) > 1$ la limite est $+\infty$. Si $C(x) = 1$ la limite est $\prod_{i,x_i\neq 0}|x_i|^{m_i}$ et si $C(x) < 1$ la limite est nulle.

On veut aussi majorer $\|x\|_{p,\mu}$ par un multiple de $\|x\|_{q,\mu}$ lorsque $p > q$. On continue à supposer tous les poids $m_i > 0$ pour éviter des complications inutiles. Supposons $\|x\|_{q,\mu} = 1$. Alors pour tout indice i on a $m_i|x_i|^q \leq 1$, donc $m_i^{p/q}|x_i|^p \leq m_i|x_i|^q$ donc en posant $A = \max m_i^{1-\frac{p}{q}}$ on a $m_i|x_i|^p \leq A m_i|x_i|^q$ et $\|x\|_{p,\mu} \leq A^{\frac{1}{p}}$. Ainsi :

Théorème 11. *Soit $x \in \mathbf{R}^N$.*

$$p > q > 0 \implies \|x\|_{p,\mu} \leq (\max_i m_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})\ \|x\|_{q,\mu} \tag{23}$$

L'inégalité est saturée en prenant $x = (0,\dots,1,\dots,0)$ le 1 étant la j-eme coordonnée, avec j tel que $m_j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = \max_i m_i^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

En combinant les deux théorèmes on confirme (en particulier) l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie $\mathbf{R}^N$. Insistons à nouveau sur le fait que si l'on remplace $\mathbf{R}^N$ par un espace de fonctions intégrables sur un espace mesuré (X,μ), il n'y a pas de raison (sauf en cas de dimension finie) de s'attendre à une majoration de $\|\cdot\|_p$ par $\|\cdot\|_q$ lorsque $p > q$. Par contre on a toujours une majoration de $\|\cdot\|_q$ par un multiple de $\|\cdot\|_p$ lorsque X est de mesure finie, en fait $\mu(X)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$ est une fonction croissante de $p > 0$. En effet notre démonstration (exposée pour $\mathbf{R}^N$ standard ou avec poids) n'a besoin que de l'inégalité de Hölder et celle-ci est valable dans ce contexte.

Et rappelons pour finir, que par exemple sur $X = [0,\infty[$ avec la mesure de Lebesgue il n'y a ni majoration ni minoration d'un $\|\cdot\|_p$ par un autre.