Moyennes de puissances

Jean-François Burnol, 18 octobre 2011

Voici une petite Note illustrant les propriétés (de base) des moyennes de puissances par des graphiques qui suggèrent d'autres propriétés que je vous laisse explorer, numériquement ou théoriquement !

Supposons $n \geq 2$ et soit $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (les y_j ci-dessous seront eux-aussi supposés positifs), et soit p réel, positif ou négatif. Notons :

$$H_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|_p = \left(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

La quantité H_0 est obtenue par la limite $p \to 0$ et donne la moyenne géométrique $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$. La « norme » $\| \cdot \|_p$ ne se comporte comme une norme que pour $p \geq 1$:

$$(p \geq 1) \qquad \left\|x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\right\|_p \leq \left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|_p + \left\|y_1, y_2, \ldots, y_n\right\|_p$$

$$(p < 1, p \neq 0) \qquad \left\|x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\right\|_p \geq \left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|_p + \left\|y_1, y_2, \ldots, y_n\right\|_p$$

On peut bien sûr remplacer $\|\cdot\|_p$ par H_p dans ces formules, qui auront alors l'avantage de valoir aussi pour $p = 0$.

Cette fiche est censée servir d'aide mémoire aux propriétés suivantes, vous trouverez l'essentiel des preuves dans, par exemple, mon texte :

http://jf.burnol.free.fr/agregnormeslp.pdf

Théorème 1. *La fonction* $p \mapsto H_p(x_1, \ldots, x_n)$ *est continue, croissante, de limite le minimum, respectivement le maximum des* x_j *lorsque* p *tend vers moins l'infini, respectivement plus l'infini.*

Théorème 2. *La fonction* $p \mapsto \left\|x_1, x_2, \ldots, x_n\right\|_p$ *est décroissante sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$*, elle tend vers zéro pour* $p \to 0^-$ *et vers plus l'infini pour* $p \to 0^+$*. Elle tend vers le minimum, respectivement le maximum des* x_j *lorsque* p *tend vers moins l'infini, respectivement plus l'infini.*

Je fais juste ici une des preuves possibles que $p \mapsto H_p$ est croissante. Chacune des fonctions $p \mapsto x_j^p$ a un logarithme qui est une fonction linéaire, donc convexe de p. Donc ces fonctions sont *log-convexes*. **Toute somme de fonctions log-convexes est log-convexe.** Donc $p \mapsto f(p) = x_1^p + \cdots + x_n^p$ a un logarithme convexe. Donc le taux d'accroissement

$$p \mapsto \frac{\log f(p) - \log f(0)}{p - 0} = \log H_p(x_1, \ldots, x_n)$$

est une fonction croissante de p. Donc H_p est une fonction croissante de p.

```
> k:=sqrt(2)^p + exp(p) + (2*Pi)^p; f:=p-> (k/3)^(1/p); g:= p-> (k)^(1/p);
```

$$k := \left(\sqrt{2}\right)^{p} + e^{p} + (2\,\pi)^{p}$$

$$f := p \mapsto \left(1/3\left(\sqrt{2}\right)^{p} + 1/3\,e^{p} + 1/3\,(2\,\pi)^{p}\right)^{p^{-1}}$$

$$g := p \mapsto \left(\left(\sqrt{2}\right)^{p} + e^{p} + (2\,\pi)^{p}\right)^{p^{-1}}$$

```
> plot([g(p),f(p),sqrt(2),2*Pi], p=-20..20, y=0..20,
>              discont=true,color=[blue,red,black,black]);
> plot([g(p),f(p),sqrt(2),2*Pi], p=-5..5, y=0..10,
>              discont=true,color=[blue,red,black,black]);
```