Sur les espaces métriques compacts

Jean-François Burnol, 15 octobre 2009

1 Topologie induite

Soit (X, d) un espace métrique. Je rappelle qu'une partie U est dite ouverte si pour tout x de U, il existe $\rho > 0$ avec $B(x, \rho) = \{y,\ d(x, y) < \rho\} \subset U$.

Bon, cela est bel et bien. Soit $Y \subset X$. Alors (Y, d) est un espace métrique. Il y a donc une notion intrinsèque pour $V \subset Y$ d'être ouvert dans Y. La proposition suivante est fondamentale, si vous ne la connaissez pas c'est grave :

Proposition 1 *Tout $V \subset Y$ ouvert dans Y est de la forme $U \cap Y$ avec U ouvert dans X. Réciproquement, tout $U \cap Y$ avec U ouvert de X est un ouvert de Y.*

Je vous incite **vraiment** à réfléchir à une preuve de cette proposition, car ce qui est dit là est constamment tacitement utilisé dans la suite.

2 Le Théorème de Borel-Lebesgue

On munit $\mathbf{R}^m$ de l'une des distances usuelles pour en faire un espace métrique, par exemple la distance $d((x_j), (y_j)) = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - y_j|$. Comme les distances usuelles sont mutuellement équivalentes, la notion d'ouvert ne dépend pas de la distance choisie. On rappelle aussi qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert, et que dire d'une partie qu'elle est bornée est à nouveau indépendant de la distance choisie, tant qu'elle est équivalente à notre d.

Théorème 1 (Borel-Lebesgue 1) *De tout recouvrement d'un pavé fermé borné $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$, $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$, par des ouverts de $\mathbf{R}^m$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Ce théorème est (ou semble être) significativement plus difficile que celui de la propriété de Bolzano-Weierstrass, qui dit que tout suite dans P possède une sous-suite convergente. Il n'est donc pas étonnant que les preuves de certains résultats soient plus faciles et plus rapides avec la technique des recouvrements. Néanmoins les propriétés de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue sont équivalentes pour les espaces métriques, nous en donnons la preuve (difficile) au verso de cette feuille (même pas eu besoin de la marge !).

Théorème 2 (Borel-Lebesgue 2) *Les sous-ensembles de $\mathbf{R}^m$ ayant la propriété d'extraction de sous-recouvrements finis sont exactement les fermés bornés.*

Bon, ce corollaire est relativement facile à prouver : soit A une partie de $\mathbf{R}^m$ avec la propriété des recouvrements. On considère les boules ouvertes $U_n = \{x, d(x, 0) < n\}$, un nombre fini d'entre elles suffit à recouvrir A. Donc A est borné. Supposons que A n'est pas fermé, son complémentaire n'est donc pas ouvert, ce qui veut dire qu'il existe $x \notin A$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ intersecte A. On prend comme ouvert U_n les y avec $d(x,y) > \frac{1}{n}$. L'union des U_n est $\mathbf{R}^m \setminus \{x\}$ donc recouvre A. Mais aucune union finie ne recouvre A. Contradiction, donc A est bien fermé. Réciproquement supposons que A est fermé et borné. Il existe donc un pavé P fermé borné contenant A. Soit maintenant U_λ, $\lambda \in \Lambda$, des ouverts recouvrant A, et posons $U = \mathbf{R}^m \setminus A$. Ainsi U et les U_λ forment un recouvrement de P par des ouverts. Par Borel-Lebesgue 1, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. On laisse tomber le U s'il est encore parmi eux puisque $U \cap A = \emptyset$ et les U_λ qui restent sont en nombre fini et recouvrent A. Fin de la preuve.

3 Espaces métriques compacts

Théorème 3 *Soit (X,d) un espace métrique. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *de toute suite (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente,*
2. *de tout recouvrement de X par des ouverts U_λ, $\lambda \in \Lambda$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Preuve : Il n'y a rien à prouver si X est vide. Ceci dit, faisons ce qui est (ou paraît être) le plus dur : $1 \implies 2$. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. On prend $x_1 \in X$. Si cela est possible on prend alors x_2 avec $d(x_1,x_2) > \epsilon$. Puis si cela est possible on prend x_3 avec $d(x_1,x_3) > \epsilon$ et $d(x_2,x_3) > \epsilon$. Et ainsi de suite. Si cela est possible à l'infini, on a alors une suite (x_n) avec $d(x_n,x_m) > \epsilon$ pour tous les $n \neq m$. Aucune suite extraite ne peut être de Cauchy, donc aucune suite extraite ne peut être convergente. Donc en fait il existe un N tel que une fois x_1, …, x_N connus, X est recouvert par les N boules ouvertes $B(x_j,\epsilon)$. Donnons-nous maintenant des ouverts U_λ, $\lambda \in \Lambda$, recouvrant X et tels qu'aucun sous-recouvrement fini n'en soit extractible. Si pour chaque j on pouvait retenir un nombre fini des U_λ recouvrant $B(x_j,\epsilon)$, en les mettant tous ensemble on recouvrirait X. Donc pour au moins l'un des j, $B(x_j,\epsilon)$ n'est recouvert par aucune union finie des U_λ. On peut faire cela pour tout $\epsilon > 0$, donc faisons-le pour $\epsilon = 2^{-N}$, $N \in \mathbf{N}$. Notons y_N le x_j qui a été retenu pour ce $\epsilon = 2^{-N}$. On a ainsi une suite (y_N), qui admet (par l'hypothèse (1)) au moins un point d'accumulation y. Il existe au moins l'un des U_λ qui contient y, prenons-en un. Comme ce U_λ est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(y,\eta) \subset U_\lambda$. Prenons N tel que d'une part $2^{-N} < \frac{1}{2}\eta$ et d'autre part $d(y,y_N) < \frac{1}{2}\eta$. Alors $B(y_N, 2^{-N}) \subset B(y,\eta) \subset U_\lambda$: contradiction ! Voilà c'est fait.

On passe à $2 \implies 1$. Ici aussi on raisonne par l'absurde : supposons que nous ayons une suite (x_n) dont aucune suite extraite ne converge. Alors, nécessairement, pour tout $x \in X$ il existe un entier $N \geq 1$ tel que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N},\ d(x_n,x) < \frac{1}{N}\}$ est de cardinalité finie (sinon on construirait une suite extraite de limite x). Prenons $N(x)$ le plus petit des $N \geq 1$ possibles, et considérons le recouvrement de X par toutes les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{N(x)})$. Pour chacune de ces boules, il n'y a qu'un nombre fini d'indices n avec x_n dans la boule. Il est donc impossible de recouvrir la totalité de X par un nombre fini de ces boules (on reconnaît une variante d'un argument de dichotomie ici). Notre recouvrement n'autorise aucun sous-recouvrement fini de X. Ceci conclut la preuve du Théorème.

Avec ce gros théorème, ou plutôt l'implication $1 \implies 2$, on peut donc considérer que la propriété de Borel-Lebesgue a été établie pour les pavés fermés bornés de $\mathbf{R}^m$ (puisque l'on a (facilement) pour eux la validité de la propriété de Bolzano-Weierstrass) et donc plus généralement pour tous les fermés bornés de $\mathbf{R}^m$.