Théorème de Mertens sur les produits de Cauchy

Jean-François Burnol, 16 décembre 2011

Soit $U = \sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série absolument convergente et $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ une série seulement supposée convergente. Soit $W = U \times V$ la série produit de Cauchy donc de terme général :

$$w_n = u_n v_0 + u_{n-1}v_1 + \cdots + u_0 v_n$$

Notre objectif est de montrer que W converge et que sa somme W (sic) vaut UV (re-sic) (d'ailleurs par le théorème d'Abel sur $\sum w_n x^n$ on montre en général que si un produit de Cauchy W converge ce ne peut être que vers UV). On va le faire par deux méthodes.

Soit $V_j = v_0 + \cdots + v_j$ les sommes partielles ; comme la suite (V_j) converge, elle est bornée, et on a un C avec $\forall j, |V_j| \leqslant C$. Plus précisément on peut aussi définir

$$C_j = \sup_{j<k\leqslant m} |v_k + \cdots + v_m| = \sup_{j<k\leqslant m} |V_m - V_{k-1}| \qquad (j \geqslant 0)$$

et $\lim C_j = 0$ conformément au critère de Cauchy. Deux remarques simples : la suite (C_j) est décroissante, et on a la majoration $\forall j, C_j \leqslant 2C$.

Notons Δ_n la quantité $\sum_{i=0}^n u_i \sum_{j=0}^n v_j - \sum_{k=0}^n w_k$. En contemplant le carré des points (i, j), $0 \leqslant i, j \leqslant n$, qui indexe la somme double $\sum_{i,j} u_j v_j$ on a la formule

$$\Delta_n = \sum_{i=0}^n u_i \sum_{j=0}^n v_j - \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=n-i+1}^n v_j \right)$$

Donc

$$|\Delta_n| \leqslant \sum_{i=1}^n |u_i| C_{n-i}$$

Notons $n = 2m + e$, avec $e = 0$ ou 1. On majore

$$|u_i| C_{n-i} \leqslant \begin{cases} |u_i| C_m & 1 \leqslant i \leqslant m \\ |u_i| 2C & m < i \leqslant 2m + e \end{cases}$$

Ceci donne

$$|\Delta_n| \leqslant C_m \sum_{i=0}^{\infty} |u_i| + 2C \sum_{i=m+1}^{\infty} |u_i|$$

Comme C_m tend vers zéro et que aussi $\sum_{i=m+1}^{\infty} |u_i| \to 0$ on en déduit $\lim \Delta_n = 0$, ce qui prouve que $\sum_{k=0}^n w_k$ admet une limite égale à celle de $\sum_{i=0}^n u_i \sum_{j=0}^n v_j$, c.q.f.d.

Deuxième preuve : notons U_N, V_N, W_N les sommes partielles. Comme

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 \ ,$$

on a

$$W_N = u_0 V_N + u_1 V_{N-1} + u_2 V_{N-2} + \cdots + u_N V_0$$

Définissons les quantités, où N joue le rôle d'un paramètre :

$$x_N(n) = \begin{cases} V_{N-n} & (n \leqslant N) \\ 0 & (n > N) \end{cases}$$

On a alors, l'écriture ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls :

$$W_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_N(n)$$

Pour chaque n on a $\lim_{N\to\infty} x_N(n) = V$, et pour chaque n et chaque N on a $|x_N(n)| \leqslant \sup_k |V_k| = C < \infty$.

Interlude : on est donc précisément dans le contexte d'une convergence dominée, *pour des « fonctions »* $f_N(n) = u_n x_N(n)$ *sur l'espace mesuré* $\mathbb{N}$ *muni de la mesure de comptage, avec comme fonction dominante « intégrable »* $g(n) = C|u_n|$. *En fait dans le contexte des séries le théorème de la convergence dominée s'appelle le* « Théorème de Tannery ». *Sa démonstation est très simple, on y procède dans le cas général comme je vais faire maintenant.*

On a $|x_N(n) - V| \leqslant C + |V|$ pour chaque N et chaque n. Pour tout $M \in \mathbb{N}$ on peut écrire :

$$\left| W_N - \sum_{n=0}^{\infty} u_n V \right| \leqslant \sum_{n=0}^{M} |u_n||x_N(n) - V| + \sum_{n>M} |u_n|(C + |V|)$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné on choisit M tel que le deuxième membre de la majoration (qui ne dépend pas de N) soit au plus $\frac{1}{2}\varepsilon$. Puis le premier membre tend vers zéro pour $N \to \infty$ car c'est une somme *finie* de choses qui tendent vers zéro. Donc pour $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ on peut affirmer

$$\left| W_N - \sum_{n=0}^{\infty} u_n V \right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

et le théorème est démontré.