À pro

et Logarithme

Jean-François Burnol, 4 avril 2009

Table de

Prérequis : nombre

nombre

La pré

de toute

(groupe
réel
ainsi qu'un peu de vocabulaire de théorie de
efficacité de
dévelo
π) corre
ici plus bref à son sujet. On n'abordera pas le sujet de

1 Racine

1.1 Racine

Soit $n \geq 1$ un entier. La fonction continue et croissante sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto f(x) = x^n$ tend vers $+\infty$ à l'infini (par exemple parce que $x \geq 1 \implies x^n \geq x \ldots$). Un théorème général sur le
donne l'existence de sa fonction réciproque, $y \mapsto g(y) = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, qui sera elle aussi continue. De plus comme $x \mapsto x^n$ e $^{n-1}$, la fonction g sera dérivable pour $y > 0$ avec $g'(y) = (n(g(y))^{n-1})^{-1} = \frac{1}{n} g(y) g(y)^{-n} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}} y^{-1}$. Ainsi :

Théorème 1 Soit $n \geq 1$ un entier. Soit y un nombre réel po
unique nombre réel x po $^{n} = y$. On le note $x = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$. La fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ e $+\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$ de fonction dérivée $y \mapsto \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}} y^{-1}$. La fonction $\sqrt[n]{y}$ e $\mathcal{R}^{+*}, \times)$.

1.2 Puissance

Soit q un nombre rationnel. Soit $y > 0$, pour tout couple (m, n) avec $q = \frac{m}{n}$, $n \geq 1$, le nombre $x = \sqrt[n]{y^m}$, qui e $\sqrt[n]{y})^m$ ne dé
on le vérifie aisément. On écrira $x = y^q$. On ob $^0 = 1$.

Théorème 2 La fonction $y \mapsto y^q$ de $\mathcal{R}^{+*} =]0, +\infty[$ vers lui-même e
homomorphisme de groupe, continu. Il e $\neq 0$ et son inverse e
alors $y \mapsto y^{1/q}$. Le

$$\forall y_1, y_2 > 0 \ \forall q \in \mathbb{Q} \quad y_1^q y_2^q = (y_1 y_2)^q \tag{1}$$

(2) $$\forall y > 0\ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \quad y^{q_1+q_2} = y^{q_1} y^{q_2}$$

(3) $$\forall y > 0\ \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \quad (y^{q_1})^{q_2} = y^{q_1 q_2}$$

Le
taire
compo

Théorème 3 La fonction $y \mapsto y^q$ sur $]0, +\infty[$ e
$y \mapsto q y^{q-1}$.

On peut alors utiliser le théorème de
inégalité qui nous sera utile :

(4) $$a \geq 1,\ 0 \leq q \leq 1 \implies a^q \leq 1 + q \cdot (a-1)$$

2 Ex

2.1 Ex

Comme corollaire à l'équation (2), et avec quelque
taire

Pro Pour chaque $a > 0$, l'application $q \mapsto a^q$ e
groupe additif $\mathbb{Q}$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{+*}$. Lorsque $a > 1$, a^q e
fonction strictement croissante de q. Lorsque $a < 1$ c'e
décroissante.

On note que le changement crucial a eu lieu : nous ne regardons plus a^q comme une fonction de a mais comme une fonction de l'ex

Théorème 4 Pour chaque $a > 0$, il existe un unique morphisme continu ϕ de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ vérifiant $\phi(1) = a$. Pour $q \in \mathbb{Q}$ on a $\phi(q) = a^q$. Pour r réel quelconque on écrit par convention a^r au lieu de $\phi(r)$. Le morphisme $r \mapsto a^r$ e
un isomorphisme lorsque $a \neq 1$. Lorsque $a > 1$, a^r e
croissante de r. Lorsque $a < 1$, a^r e
r. En plus de $a^{r+s} = a^r a^s$ on a aussi $(a^r)^s = a^{rs}$ pour tous le
$a^r b^r = (ab)^r$ pour $a, b > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

Preuve : Si $q = \frac{m}{n}$ on doit avoir $\phi(q)^n = \phi(nq) = \phi(m \cdot 1) = \phi(1)^m = a^m$ donc $\phi(q) = a^q$. Ainsi ϕ, si il existe, e
sur le $r = \lim_{q \to r} a^q$. Montrons l'existence de ϕ. On
suppo
$a = 1$, on po $\phi(r) = 1$ pour tout r). Soit $r \in \mathbb{R}$. Pour toute suite croissante de rationnel $_n$) avec limite r, la suite a^{q_n} e
convergente, soit ℓ sa limite. Dans le cas particulier où $r \in \mathbb{Q}$, a^r e
défini et vérifie $a^r \geq a^{q_n}$ pour tout n, donc $a^r \geq \ell$. Grâce à l'inégalité utile (4), pour $0 \leq r - q_n \leq 1$ il vient $a^r - a^{q_n} = (a^{r-q_n} - 1)a^{q_n} \leq (r - q_n)(a-1)a^r$. On en déduit $\ell = a^r$. Soit $r \notin \mathbb{Q}$. Si $q < r$ e $_n$ pour tout n grand donc $a^q < \ell$. Si (q'_n) e $'_n < r$ pour tout n donc $a^{q'_n} < \ell$ donc la limite ℓ' de $^{q'_n}$ vérifie $\ell' \leq \ell$. En intervertissant le rôle $\leq \ell'$ donc la limite ne dé $r-$. On procède de même à partir de suite $r+$.
Si $q < r < q'$ alors $a^{q'} - a^q = (a^{q'-q} - 1)a^q$, et cela se majore, lorsque $q' - q \leq 1$, par $(q' - q)(a-1)a^r$, qui e $' - q$ e
donc $a^{r+} = a^{r-}$. On en déduit finalement l'existence de $\lim_{q \to r} a^q$, que l'on notera a^r car c'e $\in \mathbb{Q}$, comme nous l'avons établi. La formule (2) passe à la limite aux ex $\phi(r) = a^r$ e
un morphisme. La formule (1) passe aussi à la limite de

De plus l'inégalité (4) passe à la limite d'un ex

$$0 \leq r' - r \leq 1 \implies a^{r'} - a^r \leq (r' - r)(a-1)a^r ,$$

ce qui permet de voir que $r \mapsto a^r$ e
continuité permet alors de passer à la limite dans la formule (3) ce qui donne $(a^r)^s = a^{rs}$.

Il nous re $\phi(r) = a^r$ e
$r < r'$ on choisit $q \in \mathbb{Q}$ avec $r < q < r'$ alors $a^r < a^q < a^{r'}$ par construction. Donc ϕ e $_{r \to +\infty} a^r = +\infty$ car $a^r \geq a^{[r]}$ et $\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$ (car $a^n \geq 1 + n(a-1)$ par récurrence, binôme, ou « taf »). De plus $\lim_{r \to -\infty} a^r = 0$ car $a^r = (a^{-r})^{-1}$. La continuité nous donne alors la surjectivité de $r \mapsto a^r$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.2 Logarithme

Soit $a > 0$, non égal à 1. La fonction réciproque à l'ex
a, $r \mapsto a^r$, e $\mapsto \log_a(t)$.
Elle e
$a < 1$, et vérifie le

$$\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1, \quad \log_a(a^{\pm n}) = \pm n \tag{5}$$

$$\forall t, u > 0 \quad \log_a(tu) = \log_a(t) + \log_a(u), \quad \log_a(t/u) = \log_a(t) - \log_a(u) \tag{6}$$

3 Dérivabilité, logarithme naturel, nombre e

3.1 Dérivabilité de

On peut se po $\mapsto a^r$. On a : $\frac{a^{r+h}-a^r}{h} = \frac{a^h-1}{h} a^r$. Ainsi, le Lemme crucial e

Lemme 1 Pour tout $a > 0$, il existe $\mathcal{L}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Preuve : c'e $= 1$ avec $\mathcal{L}(1) = 0$ et comme $\frac{a^h-1}{h} = -a^h \frac{(1/a)^h-1}{h}$ on peut suppo $\frac{1}{a}) = -\mathcal{L}(a))$. Si $h < 0$, on écrit $\frac{a^h-1}{h} = a^h \frac{a^{-h}-1}{-h}$ ce qui permet de voir qu'il suffit de prouver l'existence de la limite pour $h \to 0^+$. Comme $a^h - 1 \geq 0$, il suffira pour cela d'établir que $h \to \frac{a^h-1}{h}$ e
croissante de $h > 0$. Et le $\leq k$ sont équivalente
$\frac{a^h-1}{h} \leq \frac{a^k-1}{k}$, $a^h \leq 1 + \frac{h}{k}(a^k - 1)$, ou encore $(a^k)^{\frac{h}{k}} \leq 1 + \frac{h}{k}(a^k - 1)$, vraie d'aprè 4)
(que nous avons étendue aux ex
Remarque : si l'on admet l'existence de $\mathcal{L}(a)$ on a $(a^r)'' = \mathcal{L}(a)^2 a^r$, donc $r \mapsto a^r$
e $\to \frac{a^h-1}{h}$ doit être une fonction croissante de h.

Théorème 5 Pour tout $a > 0$ il existe un nombre réel $\mathcal{L}(a)$ tel que $\frac{d}{dr} a^r = \mathcal{L}(a) a^r$ sur $\mathbb{R}$. On a $\mathcal{L}(a) > 0$ pour $a > 1$, $\mathcal{L}(1) = 0$, $\mathcal{L}(\frac{1}{a}) = -\mathcal{L}(a)$ et plus généralement :

$$\forall a, b > 0 \quad \mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b) \tag{7}$$

On a $\mathcal{L}(a) > 0$ pour $a > 1$ car l'on sait dé ≥ 0 et $r \mapsto a^r$ n'e
constante. La formule (7) s'obtient en utilisant la règle de Leibnitz pour dériver
le produit $(ab)^r = a^r b^r$. Ceci amène à la que
$\mathcal{L}$ e
logarithme
mathématique e remarquable avec $\mathcal{L}(a) = \log_e(a)$?

3.2 Dérivabilité de

Comme
logarithme
réciproque donne ici :

Théorème 6 Pour chaque $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction logarithme de base a e
dérivable avec $\log_a'(t) = \frac{1}{\mathcal{L}(a)} \frac{1}{t}$ pour tout $t > 0$.

Grâce à la notion d'intégrale, la re

(8) $$\forall a \neq 1, a > 0, \forall t > 0 \qquad \log_a(t) = \frac{1}{\mathcal{L}(a)} \int_1^t \frac{1}{u} \, du$$

En faisant $t = a$ on obtient l'écriture fondamentale, valable bien sûr aussi pour $a = 1$:

(9) $$\forall a > 0 \quad \mathcal{L}(a) = \int_1^a \frac{1}{u} \, du$$

Ainsi notre fonction $\mathcal{L}$ e $^n) =$
$n\mathcal{L}(2)$ elle vérifie $\lim_{a \to \infty} \mathcal{L}(a) = \infty$. Donc il existe un unique nombre réel strictement po $= 1$. Et alors $\log_e(t) = \frac{1}{1} \int_1^t \frac{1}{u} \, du = \mathcal{L}(t)$. Ainsi $\mathcal{L}$
e **logarithme naturel** (ou né
$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}og(t) = \log(t) = \ln(t)$.

Définition 1 Le logarithme naturel $\log(t)$ e $\frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$
s'annulant en $t = 1$. Le nombre e e $= 1$. La fonction
ex $\mapsto e^x$, elle e
du logarithme naturel, vérifie l'équation différentielle $\frac{d}{dx}$ ex $=$ ex
condition initiale ex $= 1$.

3.3 Le $b) = b\,\mathrm{Log}(a)$ et $a^b = e^{b\,\mathrm{Log}(a)}$

En combinant (8) et (9) on obtient :

$$\forall a>0, a\neq 1, \forall t>0 \quad \mathrm{Log}_a(t) = \frac{\mathrm{Log}(t)}{\mathrm{Log}(a)} \tag{10}$$

Si l'on écrit $t = a^b$ on obtient $b = \mathrm{Log}_a(t) = \frac{\mathrm{Log}(t)}{\mathrm{Log}(a)}$ donc $\mathrm{Log}(a^b) = b\,\mathrm{Log}(a)$, qui vaut bien sûr aussi pour $a = 1$. Puis $a^b = ex$
permet d'établir $\frac{d}{da}a^b = ba^{b-1}$, que nous n'avions jusqu'à pré
rationnel

3.4 Re

À partir de $\mathrm{Log}(1+h) = \int_0^h \frac{du}{1+u}$, on obtient, pour $-1<h\leq 1$ la série célèbre :

$$\mathrm{Log}(1+h) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} \tag{11}$$

Par ailleurs, soit $x>0$ et po $= \frac{x-1}{x+1}$ de sorte que $-1<t<1$ et que $x = \frac{1+t}{1-t}$. On a $\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}(1+t) - \mathrm{Log}(1-t) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$. Ainsi :

$$\forall x>0 \qquad \mathrm{Log}\,x = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} \tag{12}$$

3.5 Re

Comme $\mathrm{Log}'(1) = 1$ on a $\mathrm{Log}(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, donc $\mathrm{Log}((1+\frac{1}{n})^n) \to 1$, donc, en passant à l'ex
le

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \tag{13}$$

En dévelo ≥ 2 :

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} < 1+1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Donc $e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. De plus pour tout $n \geq N$ on a

$$(1+\frac{1}{n})^n \geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \to_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

Donc $e \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$. En prenant la limite pour $N \to \infty$ on obtient finalement :

Théorème 7 Le nombre e e
tielle »[1] :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{14}$$

Cette série e
mais il y a une série plus commode pour encadrer numériquement et sans effort
e ; on modifie trè $- \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$,
$\log((1-\frac{1}{n})^n) \to -1$ et donc

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n \tag{15}$$

Par la formule du binôme, on a pour $n \geq 2$:

$$(1-\frac{1}{n})^n = 1 - 1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$$

$$\left|(1-\frac{1}{n})^n - \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1-(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - (1+\frac{1}{n})^n$$

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \tag{16}$$

Cette série alternée nous permet de minorer $\frac{1}{e}$ donc de majorer e facilement. Ainsi $\frac{1}{e} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $e < 3$, ou mieux $\frac{1}{e} > \frac{1}{3} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{11}{30}$ donc $e < \frac{30}{11} = 2 + \frac{8}{11}$. Etc... en fait en regroupant $\frac{1}{e} = \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \frac{1}{(2j-1)!}$.

1. on devrait sans doute dire ici série factorielle.

4 La série ex

4.1 La série $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Motivé par la section précédente, nous avons plus généralement :

(17) $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim n \log(1 + \frac{x}{n}) = x\,, \text{ donc : } \quad e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$$

Suppo $= 1$ on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Et si $x < 0$, en reco $= -1$ il vient :

$$\left|(1 + \frac{x}{n})^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1 - (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} |x|^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!} - (1 + \frac{|x|}{n})^n$$

donc

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - (1 + \frac{x}{n})^n\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} - (1 + \frac{|x|}{n})^n$$

Ainsi :

Théorème 8 Pour tout x réel on a la re

$$ex \quad = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Remarque : comme $(e^x)' = e^x$, la formule de Taylor avec re
$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)$, $r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$. Ainsi $|r_n(x)| \leq C\frac{|x|^n}{n!}$, avec une constante C ne dé
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ à partir de son équation différentielle $(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$. Réciproquement, notons $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Par convergence normale sur tout $[-A, +A]$, on peut calculer $\int_0^x \mathcal{E}(u)\,du$ terme à terme et on obtient $\mathcal{E}(x) = 1 + \int_0^x \mathcal{E}(u)\,du$. Par conséquent $\mathcal{E}(x)$ e $'(x) = \mathcal{E}(x)$.

4.2 Démonstration directe de $\mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$

En notant $\mathcal{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ et une fois connue sa dérivabilité avec $\mathcal{E}'(x) = \mathcal{E}(x)$, on peut montrer $\mathcal{E}(x+y)\mathcal{E}(-x) = \mathcal{E}(y)$ en dérivant par rapport à x, d'où en particulier $\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(-x) = 1$ et finalement $\mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$. Une autre démonstration peut être donnée de la manière suivante : notons $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x) = \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \frac{x^n}{n!}$. On écrit :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_1+x_2) = \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \frac{(x_1+x_2)^n}{n!} = \sum_{\substack{0\le k_1\le \mathcal{N}\\ 0\le k_2\le \mathcal{N}\\ k_1+k_2\le \mathcal{N}}} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\frac{x_2^{k_2}}{k_2!}$$

Ainsi $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_1+x_2) - \mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_1)\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_2) = -\sum_{\substack{0\le k_1\le \mathcal{N}\\ 0\le k_2\le \mathcal{N}\\ \mathcal{N}<k_1+k_2}} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\frac{x_2^{k_2}}{k_2!}$ et l'on obtient la majoration :

$$\left|\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_1+x_2) - \mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_1)\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(x_2)\right| \le \sum_{\substack{0\le k_1, 0\le k_2\\ \mathcal{N}<k_1+k_2\le 2\mathcal{N}}} \frac{|x_1|^{k_1}}{k_1!}\frac{|x_2|^{k_2}}{k_2!} = \sum_{n=\mathcal{N}+1}^{2\mathcal{N}} \frac{(|x_1|+|x_2|)^n}{n!}$$

En passant à la limite la formule $\mathcal{E}(x_1+x_2) = \mathcal{E}(x_1)\mathcal{E}(x_2)$ en découle.

5 Ex

5.1 Le morphisme ex

La série $\mathcal{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ fait sens pour tout nombre complexe z. De plus la dernière démonstration donnée dans la section précédente passe au domaine complexe et par conséquent : $\forall z, w \in \mathcal{C} : \mathcal{E}(z+w) = \mathcal{E}(z)\mathcal{E}(w)$. Ainsi $\mathcal{E}(z)\mathcal{E}(-z) = 1$ donc $\mathcal{E}(z)$ e
non nul et $\mathcal{E}$ e $\mathcal{C}, +)$ vers le groupe multiplicatif
$(\mathcal{C}^\times, \times)$. On ado z.

Notons qu'à ce stade l'on ne sait pas encore définir par exemple i^z. Si l'on savait écrire $i = e^\alpha$, on pourrait tenter la définition $i^z = e^{\alpha z}$, mais α sera-t-il unique ? Et en existe-t-il au moins un ? Nous devons donc étudier l'image et le noyau du morphisme $\mathcal{E}$. Il ne peut s'agir d'un isomorphisme car contrairement à $(\mathcal{C}, +)$ il y a dans $(\mathcal{C}^\times, \times)$ de
élément $-1,\ i,\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ldots)$.

On a $\overline{\mathcal{E}(z)} = \mathcal{E}(\overline{z})$ donc $|\mathcal{E}(z)|^2 = \mathcal{E}(z+\overline{z}) = \mathcal{E}(2\mathcal{R}e(z)) = (e^{\mathcal{R}e(z)})^2$ et ainsi :

$$\forall z \in \mathcal{C} \quad |\mathcal{E}(z)| = e^{\mathcal{R}e(z)}$$

Par conséquent si $z = x+iy$, $x, y \in \mathcal{R}$, $\mathcal{E}(z) = e^x e^{iy}$, avec $|e^{iy}| = 1$. Tout nombre complexe non nul w s'écrit $w = \rho u$ avec $\rho = |w| = e^{\ln|w|}$ et $|u| = 1$. La que
celle de la surjectivité et du noyau du morphisme $t \mapsto e^{it}$ du groupe additif $\mathcal{R}$ vers le groupe $\mathcal{U}(1) = \{u \in \mathcal{C}, |u| = 1\}$.

Le théorème suivant e [2]

Théorème 9 Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme e^{it} avec $t \in \mathcal{R}$. Il existe un certain nombre réel $\pi > 0$ tel que $e^{it} = 1 \iff t \in 2\pi\mathcal{Z}$. On a $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = +i$. Ce nombre π e
arc rectifiable.

5.2 La formule d'Euler

Dans le cours de la discussion du théorème crucial ci-de Formule d'Euler :

$$\forall t \in \mathcal{R} \qquad e^{it} = co \quad + i\sin(t) \tag{18}$$

Bien sûr cela dé
non, la formule n'e
Voyons trè
motivée par l'étude de la géométrie du cercle (passage de
quement) mène à certaine
l'on connaît le
stade on prouve que ce $' = -\sin$ et $\sin' = co$
formule de Taylor (par exemple) avec re
série $= \sqrt{-1}$, qui vérifie $i^2 = -1$
et $i^4 = 1$ on constate que $co \quad + i\sin(t)$ donne la série d'Euler e^{it}. Il ne re
qu'à s'émerveiller du lien entre la courbe ex
tiennent la main, le
faut peut-être pas tro

2. voir mon texte sur la Leçon 213 (ex π).

5.3 Branche principale du Logarithme complexe

D'aprè -1, s'écrit de manière unique $e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$. Donc, pour $w \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ on a $w = e^{\mathrm{Log}\, w}$ avec

$$\mathrm{Log}(w) = \ln|w| + i\theta, \qquad |\theta| < \pi \tag{19}$$

où $e^{i\theta} = w/|w|$. Cette fonction Log e
continue sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ mais a une discontinuité (un saut de $+i2\pi$) lorsque l'on franchit la coupure $]-\infty, 0[$ du bas vers le haut. La partie imaginaire e
de w, $\theta = \mathrm{Arg}(w)$. La formule $\mathrm{Log}(w_1 w_2) = \mathrm{Log}(w_1) + \mathrm{Log}(w_2)$ vaut à condition que $|\mathrm{Arg}(w_1) + \mathrm{Arg}(w_2)| < \pi$. Si $\pi < \mathrm{Arg}(w_1) + \mathrm{Arg}(w_2)$ $(< 2\pi)$, $\mathrm{Log}(w_1 w_2) = \mathrm{Log}(w_1) + \mathrm{Log}(w_2) - 2i\pi$, si $(-2\pi <)$ $\mathrm{Arg}(w_1) + \mathrm{Arg}(w_2) < -\pi$, $\mathrm{Log}(w_1 w_2) = \mathrm{Log}(w_1) + \mathrm{Log}(w_2) + 2i\pi$, et si $\mathrm{Arg}(w_1) + \mathrm{Arg}(w_2) = \pm\pi$, $w_1 w_2 \in]-\infty, 0[$.

Le logarithme et l'ex
polaire $+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\, 2\, \mathrm{Arctg}\, \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ vaut dans tout le domaine $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Si $x > 0$ on peut utiliser plus simplement :

$$\mathrm{Log}(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\, \mathrm{Arctg}\, \frac{y}{x} \tag{20}$$

Dans ce demi-plan on a aussi la re $= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1}$ et dans le disque $|h| < 1$, $h = z - 1$, on a la série usuelle pour $\mathrm{Log}(1 + h)$, qui vaut aussi pour $|h| = 1$, $h \neq -1$. On conclura en disant que ex
complexe avec ex $'(z) =$ ex $'(z) = \frac{1}{z}$.