À propos du Théorème des sept cercles (Part Two)

Jean-François Burnol, 5 février 2012 [v2]

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre D, P_1 et P_2 deux points sur $\mathcal{C}$, distincts. Soit C_1 un cercle tangent intérieurement en P_1 à $\mathcal{C}$, de diamètre $d_1 < D$, et C_2 un cercle tangent intérieurement en P_2 à $\mathcal{C}$, de diamètre $d_2 < D$. Les cercles C_1 et C_2 sont mutuellement tangents si et seulement si la relation

$$\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{D}\right)\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{D}\right) = \frac{1}{d(P_1, P_2)^2} ,$$

est vérifiée.

Notez que si l'on fait $D \to +\infty$ on retrouve le résultat plus simple $d_1 d_2 = d(P_1, P_2)^2$ concernant les cercles tangents entre eux et tangents à une même droite (et du même côté de la droite, j'avais oublié de le préciser dans mon précédent texte, mais bon ça allait un peu de soi tout de même). La démonstration est un calcul que je n'ai pas envie de LaTeXifier ici. Je l'ai fait en utilisant une inversion (ou plutôt une homographie avec les nombres complexes) pour remplacer le cercle $\mathcal{C}$ par une droite, ma méthode ne nécessite que quelques lignes cependant il faut savoir poser les bonnes notations pour éviter des résultats intermédiaires volumineux.[v2] Je cite ce Théorème car je l'ai utilisé pour construire une feuille GeoGebra :

http://jf.burnol.free.fr/agreglesseptcercles3.ggb

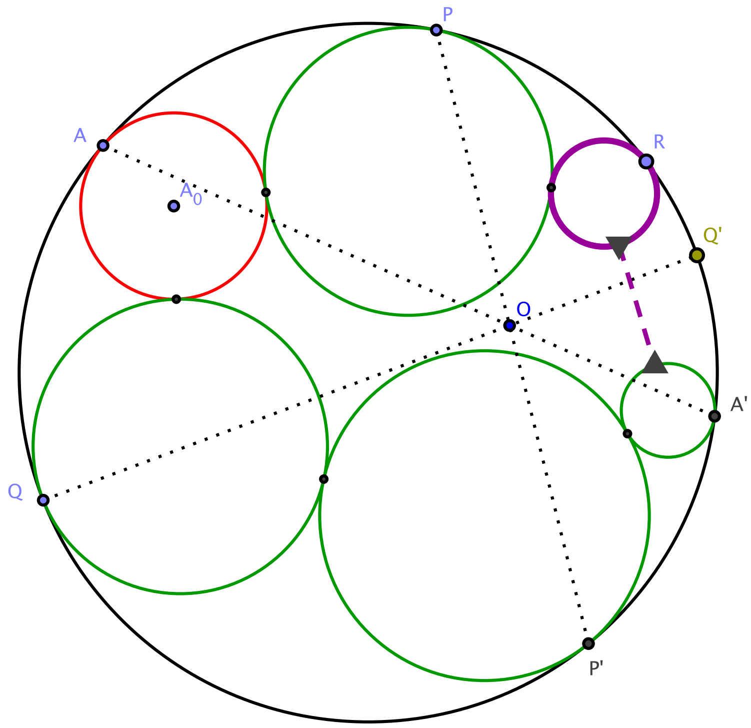
qui produit des figures comme celles de la page suivante.

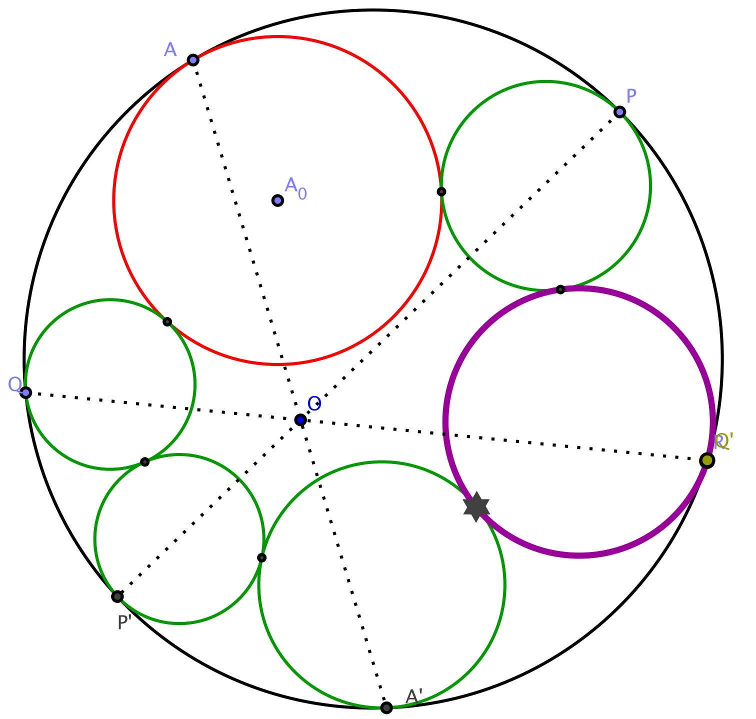
Dans ces figures les points A, P, Q, et R sont libres de bouger sur le cercle, le point O à l'intérieur du cercle, les points A' et P' et Q' sont obtenus en prolongeant les segments AO, PO et QO. Le centre A_0 du cercle rouge est aussi libre de bouger sur le rayon menant à A. Les cercles verts se déforment alors en conséquence en maintenant leurs tangences, ainsi que le cercle violet attaché à R. La chaîne des six cercles se complètera seulement lorsque R est mis exactement en Q', confirmant le théorème des sept cercles.

Liens vers les feuilles GeoGebra :

http://jf.burnol.free.fr/agreglesseptcercles0.ggb
http://jf.burnol.free.fr/agreglesseptcercles1.ggb
http://jf.burnol.free.fr/agreglesseptcercles2.ggb
http://jf.burnol.free.fr/agreglesseptcercles3.ggb

[v2]. Une inversion de pôle en P_1 transforme $\mathcal{C}$ et C_1 en deux droites parallèles et permet de voir l'unicité du rayon r_2 pour $P_2 \neq P_1$ donné, et que C_1 et C_2 se touchent extérieurement. Ceci étant acquis, la c.n.s. est donc $|(R - r_1) - (R - r_2)e^{i\theta}| = r_1 + r_2$, avec $P_1 = R$, $P_2 = Re^{i\theta}$ dans le plan complexe. On élève au carré et après utilisation de $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, le résultat arrive facilement. Bien sûr $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$, $D = 2R$.


P
A
R
A_0
Q'
O
A'
Q
P'


A
P
A_0
Q
O
Q'
P'
A'