

## À propos du Théorème des sept cercles

Jean-François Burnol, 4 février 2012

La question posée était : *si l'on part de six points sur un cercle  $\mathcal{C}$ , formant trois segments concourants en un point  $O$ , peut-on trouver six cercles tangents entre eux et à  $\mathcal{C}$  comme dans le Théorème des sept cercles ?* La réponse est **Oui** : une fois les points ( $O$  et les six points sur  $\mathcal{C}$ ) nommés dans un certain ordre, pour chaque choix d'un cercle tangent à  $\mathcal{C}$  en l'un d'entre eux, il y a une et une seule configuration possible.

Je note <sup>1</sup>  $P, A, Q$  trois parmi les six points, en leur *imposant* d'être dans cet ordre si l'on parcourt  $\mathcal{C}$  (que l'on pourra prendre cercle unité dans le plan complexe) dans le sens trigonométrique. Les points restants sont alors nommés  $P', A', Q'$ . Si je pars d'un cercle  $C_A$  tangent en  $A$  au cercle unité, il existe un unique cercle  $C_P$  tangent à la fois à  $C_A$  et à  $\mathcal{C}$  en  $P$ , et un unique cercle  $C_Q$  tangent à  $C_A$  et à  $\mathcal{C}$  en  $Q$ . Puis, il existe un unique cercle  $C_{P'}$  tangent à  $C_Q$  et à  $\mathcal{C}$  en  $P'$  et un unique cercle  $C_{Q'}$  tangent à  $C_{P'}$  et à  $\mathcal{C}$  en  $Q'$ . Le Théorème est alors que le cercle  $C_{A'}$  tangent à  $\mathcal{C}$  en  $A'$  et par ailleurs tangent à  $C_{P'}$  est automatiquement aussi tangent à  $C_{Q'}$  (et vice versa). Dans le cas général ces cercles peuvent avoir des intersections entre eux, autres que les points de tangence pré-cités.

Bien sûr en prouvant ceci on re-prouve le théorème des sept cercles, et en un sens c'est juste une ré-écriture permettant de répondre à la « question inverse » qui m'a été posée afin de m'empêcher de dormir ce week-end, mais comme on est samedi matin, et que c'est la nuit dernière qui a été peuplée de cercles, j'ai bon espoir de m'en sortir.

J'ai obtenu la preuve dans un premier temps, puis j'ai pensé que j'avais commis une erreur grossière, pour m'apercevoir finalement que ce n'en était pas une, et que j'utilisais par divination la propriété classique suivante relative aux segments concourants entre paires de points sur un cercle.

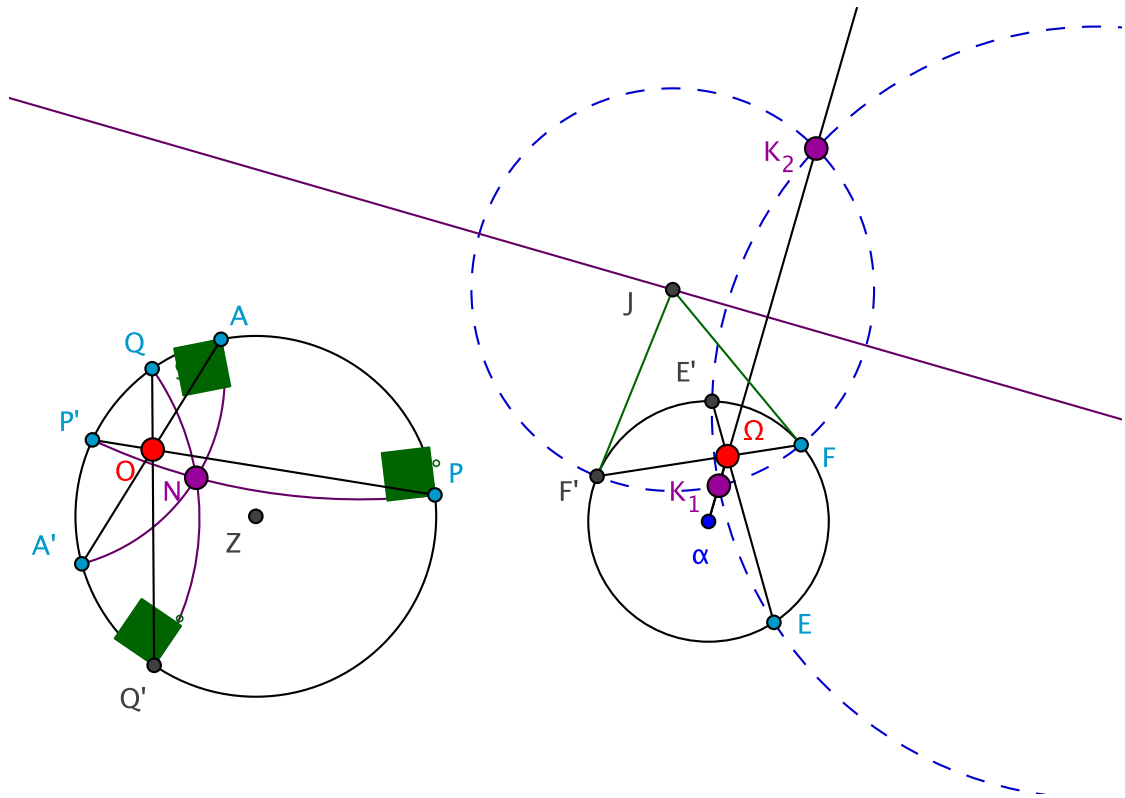
**Théorème 1.** *Soit  $\Omega$  un point intérieur à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\alpha$ . Soit  $K_1$  et  $K_2$  les points sur la demi-droite  $\alpha\Omega$  respectivement à l'intérieur et à l'extérieur et déterminés par les deux conditions suivantes :*

1.  $\alpha, \Omega, K_1, K_2$  sont en division harmonique,
2.  $K_1$  et  $K_2$  sont échangés par l'inversion dans  $\mathcal{C}$ .

*Alors, pour toute droite passant par  $\Omega$  et d'intersection avec le cercle deux points  $E$  et  $E'$ , les points  $E, E', K_1$  et  $K_2$  sont cocycliques et le cercle passant par eux est orthogonal à  $\mathcal{C}$ . Pour que deux points donnés  $F$  et  $F'$  sur le cercle soient tels que le segment  $FF'$  passe par  $\Omega$  il est nécessaire et suffisant que le cercle orthogonal à  $\mathcal{C}$  en  $F$  et  $F'$  passe par  $K_1$ .*

---

1. se reporter aux figures sur les pages suivantes.



*Preuve.* La figure illustre le Théorème. À gauche on est parti de 4 points  $A$  et  $A'$ ,  $P$  et  $P'$ , on a noté  $O$  l'intersection des segments  $AA'$  et  $PP'$  et  $N$  l'intersection des arcs de cercles orthogonaux à  $\mathcal{C}$ . Puis on a un point variable  $Q$ , on note  $Q'$  le point sur la droite  $QO$  et on constate que le cercle orthogonal à  $\mathcal{C}$  en  $Q$  et  $Q'$  passe effectivement par le point  $N$ . Visiblement le centre  $Z$  du cercle,  $N$  et  $O$  sont alignés. À droite, qui utilise les notations du théorème, on part de  $\Omega$ , et de points  $E, F$ , sur le cercle, on construit les cercles orthogonaux, leurs centres sont sur la droite polaire de  $\Omega$ , et on constate l'existence des points  $K_1$  et  $K_2$ .

Pour faire la preuve (je laisserai quelques micro-détails à compléter) je vais carrément passer en coordonnées cartésiennes, de sorte que  $\mathcal{C}$  est le cercle unité et  $\Omega = (0, \omega)$ . Soit, sur le cercle, deux points  $F = (u, v)$ ,  $u > 0$ , et  $F' = (u', v')$ ,  $u' < 0$ , tels que  $\Omega$  est sur le segment  $FF'$ . On peut donc écrire  $(u', v') = (0, \omega) - t(u, v - \omega)$  et il en résulte  $uv' - vu' = (1+t)u\omega$ . Un point  $J = (x_0, y_0)$  est sur la tangente en  $F$  au cercle si  $u \cdot (x_0 - u) + v \cdot (y_0 - v) = 0$  ou encore  $ux_0 + vy_0 = 1$ . Il est sur la tangente en  $F'$  si  $u'x_0 + v'y_0 = 1$ . Donc  $y_0 = (u - u') / (uv' - u'v) = (1+t)u / ((1+t)u\omega) = 1/\omega$ . Donc tous ces points sont sur (et forment) la Droite d'équation  $y = 1/\omega$ , c'est la fameuse droite polaire de  $\Omega$ . Le cercle de centre  $J$  passant par  $F$  et  $F'$  a pour équation  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (u-x_0)^2 + (v-y_0)^2 = u^2 + v^2 - 2(ux_0 + vy_0) + x_0^2 + y_0^2 = -1 + x_0^2 + y_0^2$ . Si l'on fait  $x = 0$  on tombe sur l'équation  $(y-y_0)^2 = y_0^2 - 1$  qui a les deux racines  $y_1 = y_0 - \sqrt{y_0^2 - 1}$  et  $y_2 = y_0 + \sqrt{y_0^2 - 1}$ . Cela signifie (puisque  $y_0 = \omega^{-1}$  est indépendant

de  $J$ ) que les points  $K_1 = (0, y_1)$  et  $K_2 = (0, y_2)$  sont communs à tous ces cercles. On a  $y_1 y_2 = 1$  ce qui montre qu'ils sont échangés par l'inversion, et  $y_1 + y_2 = 2y_0$  ce qui montre que leur milieu est l'inverse de  $\Omega$ , et on a aussi  $y_1^{-1} + y_2^{-1} = 2\omega^{-1}$  ce qui montre (relation de Descartes) que  $(0, \omega)$  et  $(y_1, y_2)$  sont des conjugués harmoniques :  $\frac{y_1-0}{\omega-y_1} = -\frac{y_1-\omega}{y_2-\omega}$ , ou  $\frac{y_1-0}{\omega-y_1} = \frac{y_2-0}{y_2-\omega}$ , ou  $\omega(y_1^{-1} + y_2^{-1}) = 2$ , etc. . . Réciproquement, les deux équations  $y_1 y_2 = 1$  et  $1/y_1 + 1/y_2 = 2/\omega$  déterminent  $K_1$  et  $K_2$ .  $\square$

Je passe maintenant au *Théorème des sept cercles*, que j'aborde du point de vue de la réciproque comme expliqué dans l'introduction. Je vous laisse transformer ceci en une preuve du Théorème des sept cercles dans le sens direct. On a donc six points  $P, A, Q$  (dans cet ordre), et  $P', A', Q'$  sur le cercle unité  $\mathcal{C}$  tels que les trois segments  $PP'$ , etc. . . , ont le point commun  $O$ . Par notre Théorème (à nous) qui précède, on peut considérer le point  $N$  qui est l'intersection commune des trois cercles orthogonaux au cercle unité en  $A$  et  $A'$ , ou  $P$  et  $P'$ , ou  $Q$  et  $Q'$ . Pour des raisons qui tiennent à la composition de ce pdf, je note  $w$  l'affixe du point  $N$ .

Transformons toute la figure par l'homographie

$$z \mapsto \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$$

. Cette transformation envoie le cercle unité sur lui-même et l'intérieur sur l'intérieur (de manière bijective) et le point  $N$  d'affixe  $w$  devient l'origine. Nos points  $A, P, Q$ , etc. . . ont été transformés mais je conserve les mêmes lettres. Les cercles orthogonaux ont des images (cercles ou droites, on va voir) orthogonales au cercle unité, et passant maintenant par l'origine, ce sont donc en fait des droites, et maintenant les points  $A$  et  $A'$ ,  $P$  et  $P'$ ,  $Q$  et  $Q'$  forment des diamètres. D'ailleurs le pôle de notre homographie est en  $1/\bar{w}$  c'est-à-dire en l'image de  $N$  par l'inversion, c'est donc avec les notations du théorème précédent le point  $K_2$  là où  $N = K_1$  (et  $O = \Omega$ ).

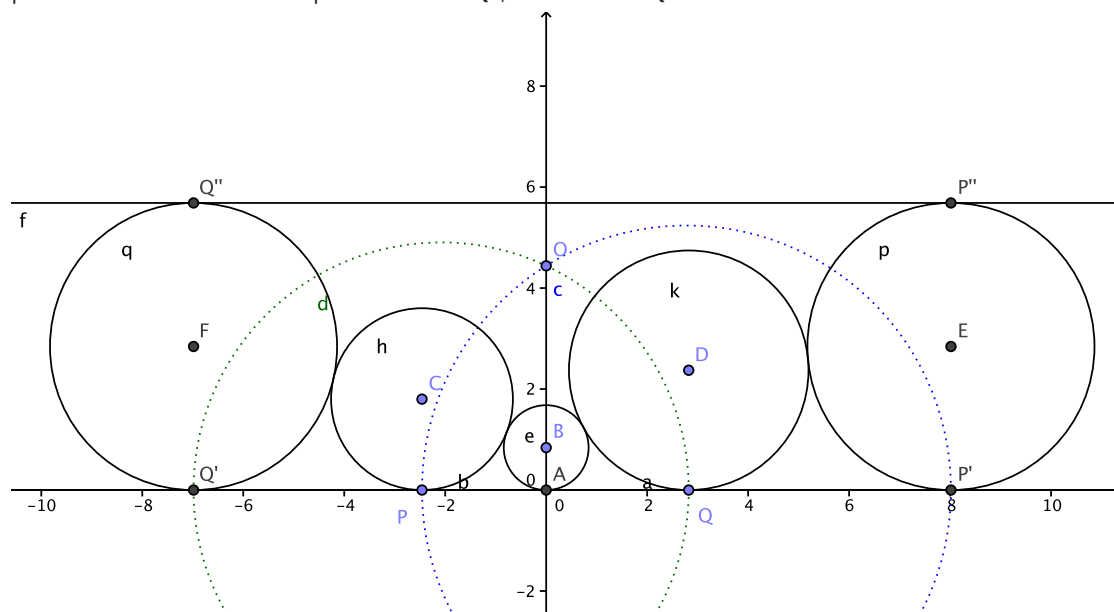
Maintenant, tous les cercles à l'intérieur du cercle unité sont transformés en des cercles, et les relations de tangences (et même les angles) sont tous préservés par notre homographie dont le pôle est extérieur au cercle. On a donc totalement réduit le problème au cas où  $AA', PP'$ , et  $QQ'$  sont des diamètres (le point subtil c'est que le point  $O$  d'origine a certes une image par l'homographie, mais que cette image ne nous intéresse pas, tout ce qui compte maintenant c'est que  $N$  est devenu le centre du cercle).

On va maintenant, comme c'est standard, utiliser une inversion de pôle en  $A'$  de sorte que les cinq points  $A, P, Q, P', Q'$  peuvent maintenant être vus sur une droite : je prends en fait pour fixer les idées la formule, si  $A = e^{i\theta}$ , et donc  $A' = -e^{i\theta}$ ,

$$z \mapsto -i \frac{z - e^{i\theta}}{z + e^{i\theta}}$$

Attention ce n'est pas exactement une inversion mais une inversion combinée avec une symétrie dans une droite, mais peu importe, pour nous c'est plus pratique. Ceci envoie

l'intérieur du cercle unité sur le demi-plan de Poincaré, et l'origine sur  $+i$  et le cercle  $\mathcal{C}$  sur l'axe réel, et  $A$  sur zéro. La figure devient alors comme ci-dessous, avec pour l'instant encore uniquement les points  $A, P, Q$ , et  $O$ , ainsi que  $P'$  et  $Q'$  (il faut imaginer  $A' = i\infty$ , et surtout ne tenez pas compte des graduations sur les axes, on est censé avoir  $O = +i$ ). Les arcs de cercles en pointillés bleus sont les images des diamètres  $PP'$  et  $QQ'$  qui m'ont permis de construire les points  $P'$  et  $Q'$ , avec  $P$  et  $Q$  arbitraires.



Ensuite, les points  $O (= i)$ ,  $A (= 0)$ ,  $P = -p$ ,  $Q = +q$  étant fixés, je choisis arbitrairement un nombre réel  $y > 0$ , de sorte que  $B = (0, y) = iy$  serve de centre au cercle  $C_A$  (ou plutôt son image après nos diverses transformations). Le point  $P' = +p'$  est obtenu par  $pp' = 1$ , (ou plutôt  $AO^2 = AP \cdot AP'$ ), le point  $Q' = -q'$  par  $qq' = 1$ . Comment construit-on le cercle  $C_P$  ?

En utilisant le théorème de Pythagore vous montrerez que deux cercles tangents entre eux et à une droite aux points, respectivement,  $M$  et  $N$  ont leurs rayons vérifiant  $r_1 r_2 = (MN/2)^2$ .

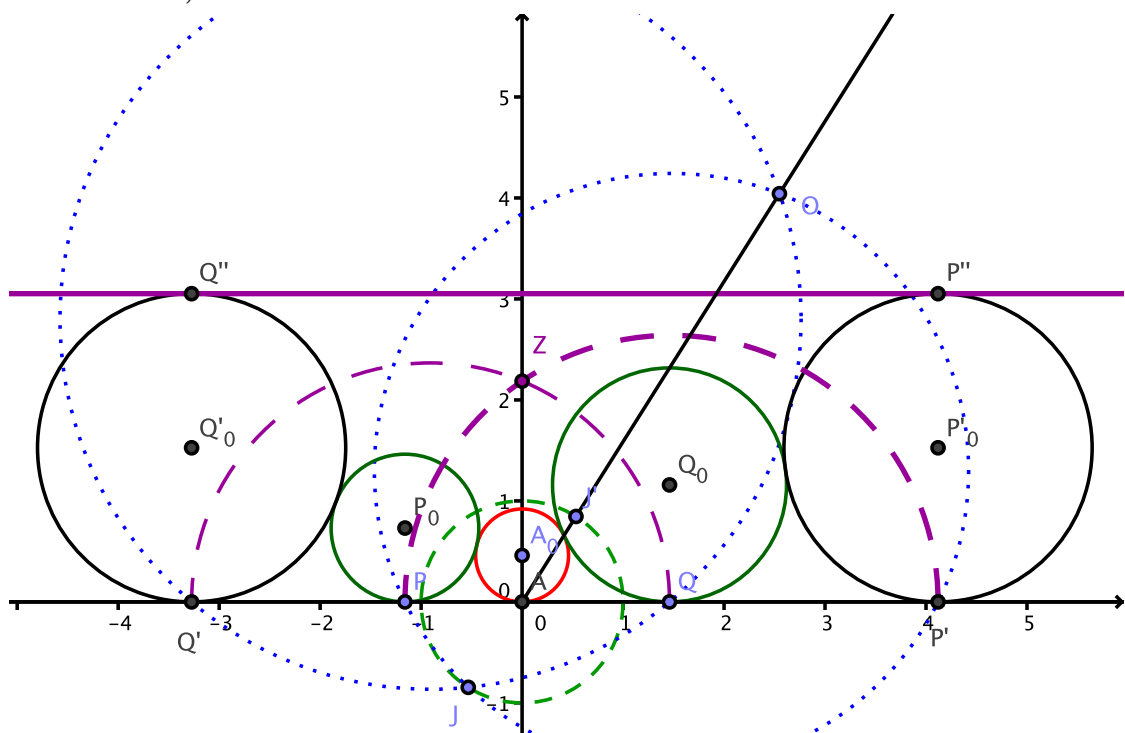
Donc  $C_P$  a pour centre  $-p+ic$  avec  $c = p^2/(4y)$ . De même  $C_Q$  a pour centre  $q+id$  avec  $d = q^2/(4y)$ . Comment obtient-on alors le cercle  $C_{Q'}$  ? eh bien son centre est  $F = q' + if$  avec  $f = (p - q')^2/(4c)$ . Et le cercle  $C_{P'}$  ? son centre est  $E$  (désolé je suis les notations de ma figure geogebra),  $E = p' + ie$  avec  $e = (p' - q)^2/(4d)$ . Le miracle c'est que :

$$f = \frac{(p - q')^2}{4c} = \frac{(p - 1/q)^2 y}{p^2} = y \cdot \left(1 - \frac{1}{pq}\right)^2 = \frac{(q - 1/p)^2 y}{q^2} = \frac{(q - p')^2}{4d} = e$$

Donc il y a une droite horizontale tangente aux deux cercles  $C_{P'}$ ,  $C_{Q'}$ , et c'est notre fameux cercle  $C_{A'}$ . CQFD.

Dans le fichier GeoGebra annexe, les points  $P$ ,  $Q$ ,  $O$  et le centre  $B$  du cercle tangent en  $A$  sont tous mobiles et la figure se déformera avec eux. Je ne sais pas comment dire à GeoGebra de faire une inversion sur toute une figure simultanément, donc je ne propose pas ici la figure avec les six cercles deux-à-deux tangents et tous tangents de l'intérieur à  $C$ . J'insiste sur le fait, comme on le voit tout de suite en faisant bouger les points que la figure représentée avec tous ses cercles sans intersections à part les tangences est un peu spéciale. Mais les tangences sont maintenues quels que soient les cas, *du moment que P et Q restent avec A entre eux*.

Je passe maintenant à une figure d'apparence un peu plus complexe (pardon pour les choix bizarres de lettres, mais l'image étant déjà exportée je n'ai plus voulu me replonger dans la source) :



Cette figure vient d'une construction où l'on n'a pas fait l'étape initiale de s'arranger pour que  $AA'$  etc... soient des diamètres dans le cercle initial. On a directement fait une homographie envoyant  $A$  sur zéro et  $A'$  à l'infini. La demi-droite oblique passant par  $A$  et  $O$  dans la figure correspond au diamètre  $AA'$  le point  $A'$  étant à l'infini. La figure dynamique GeoGebra a un point  $J$  dans le demi-plan inférieur qu'on peut faire bouger ce qui correspond à bouger  $A'$  (mais dans la situation d'origine les points  $P$  et  $Q$  ne resteraient pas fixes comme ils le sont ici sur l'axe réel).

Dans cette figure, les points  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $O$  sont donnés, puis le cercle rouge tangent en  $A$ . Le point important  $J$  est sur la droite  $AO$ , dans le demi-plan inférieur et sur le cercle unité. Tout le reste en découle : les deux cercles verts tangents au cercle rouge d'une

part, les points  $P'$  et  $Q'$  qui sont obtenus en traçant les cercles passant par  $O$ ,  $P$ , et  $J$ , ou  $O$ ,  $Q$ , et  $J$ , puis les cercles noirs tangents aux cercles verts en  $P'$  et  $Q'$ , finalement la droite violette qui met en évidence que les deux derniers cercles construits ont même rayon, cette droite est donc le cercle  $C_{A'}$  dont l'existence est ainsi prouvée. Sont aussi créés les demi-cercles en pointillés violets de diamètres  $PP'$  et  $QQ'$  et on constate qu'ils ont une intersection commune  $Z$  sur l'axe vertical. Ce point  $Z$  est la fameux point  $K_1$  si  $O$  est noté  $\Omega$  et l'ensemble est vu à nouveau dans le disque unité de départ avant l'homographie. Je suis vraiment désolé (enfin non, trop fatigué pour l'être) pour toutes ces lettres changeantes.

Supposons qu'au départ  $A = e^{i\phi}$  et  $A' = e^{i\phi'}$ . J'impose que les arguments soient choisis de sorte que  $0 < \phi - \phi' < 2\pi$ . J'utilise l'homographie

$$z \mapsto e^{-i\frac{\phi-\phi'}{2}} \frac{z - z_A}{z - z_{A'}} = e^{-i\frac{\phi-\phi'}{2}} \frac{z - e^{i\phi}}{z - e^{i\phi'}}$$

On vérifie qu'elle envoie bien le cercle unité sur l'axe réel, et le centre  $z = 0$  du cercle unité est envoyé sur le point  $e^{+i\frac{\phi-\phi'}{2}}$  qui a partie imaginaire positive. Donc l'intérieur est envoyé biunivoquement sur le demi-plan de Poincaré ouvert. Un point très important est le point  $J$  image de l'infini, c'est donc  $e^{-i\frac{\phi-\phi'}{2}}$ , donc, on constate, c'est le conjugué complexe de l'image du centre du cercle.

Enfin, la droite d'origine  $AA'$  devient la droite oblique de la figure, passant par  $A$  et par  $J$  : en effet toutes les droites sont transformées par l'homographie en des cercles-droites passant par le point  $J$ , donc la droite  $AA'$  devient la droite  $JA$  (à ce stade du pdf, j'ai bien le droit de dénoter par les mêmes lettres les points se correspondant via une correspondance biunivoque...), et le segment  $AA'$  devient la demi-droite oblique de la figure, sur laquelle on a positionné un point  $O$ , donc une fois donné  $P$ , le point  $P'$  doit être sur le cercle défini par  $O$ ,  $P$  et  $J$ , puisque ce cercle est l'image de la droite passant par  $O$  et par  $P$  dans la figure d'origine. Finalement, lorsque l'on regarde le cercle de diamètre  $PP'$  dans cette figure, c'est comme si l'on regardait le cercle orthogonal au cercle initial et passant par les points initiaux  $P$  et  $P'$ . Puisque les droites  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $AA'$  sont initialement concourantes, on sait que les cercles orthogonaux le sont aussi, donc maintenant en un point  $Z$  sur l'axe vertical, car l'axe vertical correspond initialement à l'arc de cercle orthogonal joignant  $A$  à  $A'$ . Le point dénoté  $Z$  dans cette dernière figure joue donc le rôle qu'avait  $O$  dans la figure d'avant, celle avec laquelle on a fait la preuve.