L'ellipse illusoire du Théorème des sept cercles

Jean-François Burnol, 6 février 2012 [v2b]

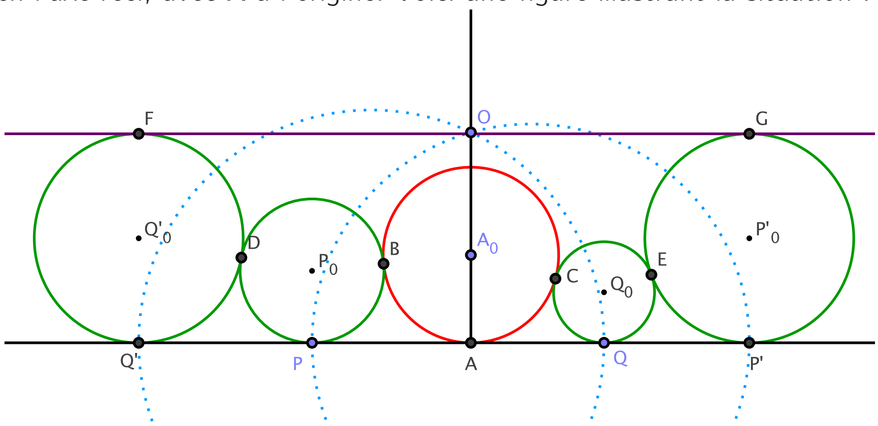
Cette Note fait suite à la précédente :

http://jf.burnol.free.fr/agreglesseptcercles.pdf

où je m'étais intéressé au *Théorème des sept cercles* du point de vue de sa réciproque. J'y avais en particulier expliqué pourquoi on pouvait supposer que (deux des trois) segments formaient des diamètres. Je reprends ici rapidement l'énoncé et sa démonstration, une fois cette réduction faite, pour poser les notations et le contexte. Pendant la rédaction je me suis aperçu que pour le sens **direct** du *Théorème des sept cercles*, que je n'avais pas considéré dans ma Note précédente, il **faut** imposer une condition qui est indiquée dans l'énoncé qui suit :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle, et P, A, Q, trois points sur $\mathcal{C}$, d'opposés P', A', Q' et tels que les diamètres PP', AA', QQ' soient distincts. Soit C_A un cercle tangent à $\mathcal{C}$ en A, et (strictement) intérieur, puis C_P et C_Q les uniques cercles tangents à C_A et tangents à $\mathcal{C}$ en P et Q respectivement. Soit alors $C_{P'}$ l'unique cercle tangent à $\mathcal{C}$ en P' et tangent à C_Q (on note que $P' \neq Q$ par hypothèse), et $C_{Q'}$ l'unique cercle tangent à $\mathcal{C}$ en Q' et tangent à C_Q. Alors, il existe* **deux points** *M sur $\mathcal{C}$ tels que l'on puisse tracer un cercle tangent à $\mathcal{C}$ (en M) et aussi tangent à la fois à $C_{P'}$ et à $C_{Q'}$: l'un est A' (illustrant le* Théorème des sept cercles*) et l'autre est situé sur l'arc de cercle menant de P' à Q' et ne passant pas par A'. Si l'on exige que les six cercles soient mutuellement extérieurs alors on ne peut prendre que $M = A'$ (mais la réciproque ne vaut pas nécessairement).*

Preuve. On peut prendre pour $\mathcal{C}$ le cercle unité du plan complexe et $A = -1$, $A' = +1$. On considère $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ qui transforme l'intérieur de $\mathcal{C}$ en le demi-plan de Poincaré et transforme $\mathcal{C} \setminus \{A'\}$ en l'axe réel, avec A à l'origine. Voici une figure illustrant la situation :



Dans la figure A', P, A, et Q, sont rencontrés dans cet ordre sur le cercle, mais on pourrait avoir à la fois P et Q à droite de A par exemple. On a $A = 0$, $O = i$, et trois paramètres réels $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq \pm q$ et $y > 0$, de sorte que le centre (dans le demi-plan) du cercle tangent en A est $A_0 = yi$, et $P = p$, $Q = q$. Le centre P_0 du cercle tangent à l'axe réel en P a pour affixe $p + ip^2/4y$, et de même $Q_0 = q + iq^2/4y$. Puis $P' = -1/p$ et $Q' = -1/q$ et $P'_0 = -1/p + iy(1 + (pq)^{-1})^2$ et $Q'_0 = -1/q + iy(1 + (pq)^{-1})^2$.

Ces formules sont obtenues en disant que deux cercles C_1 et C_2 dans le demi-plan et tangents à l'axe réels, de centres $x_1 + iy_1$ et $x_2 + iy_2$, $y_1, y_2 > 0$ sont mutuellement tangents si et seulement si $|x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1)| = y_1 + y_2$, c'est-à-dire $(x_1 - x_2)^2 = 4y_1y_2$. On notera que C_1 et C_2 sont nécessairement extérieurs l'un à l'autre.

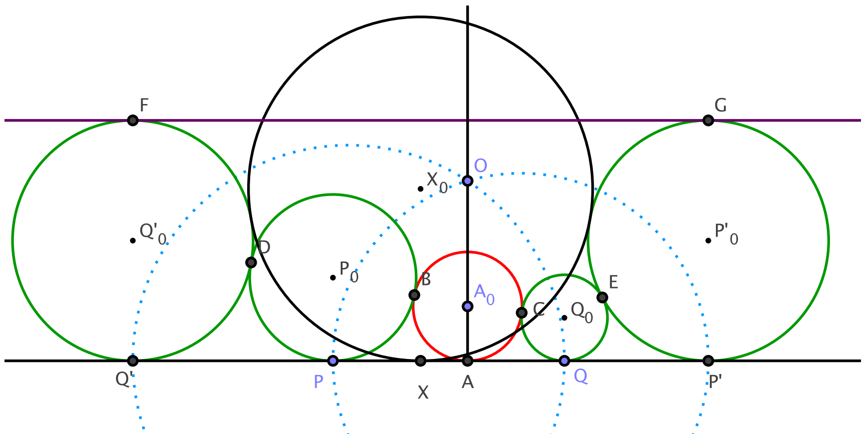
Ces calculs montrent que P'_0 et Q'_0 sont sur la même droite horizontale à l'ordonnée $Y = y(1 + (pq)^{-1})^2$ et donc qu'il existe une droite horizontale tangente aux deux derniers cercles construits, qui correspond dans la figure d'origine à un cercle tangent à $\mathcal{C}$ au point A'.

Soit $M = x$ un point sur l'axe réel, et voyons s'il est possible de construire un cercle de centre $x + it$ de rayon $t > 0$ qui soit tangent simultanément à $C_{P'}$ et $C_{Q'}$. Cela équivaut à :

$$4tY = (x + p^{-1})^2 = (x + q^{-1})^2$$

C'est donc en effet possible avec $x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$, c'est-à-dire avec $M = X = \frac{1}{2}(P'_0 + Q'_0)$.

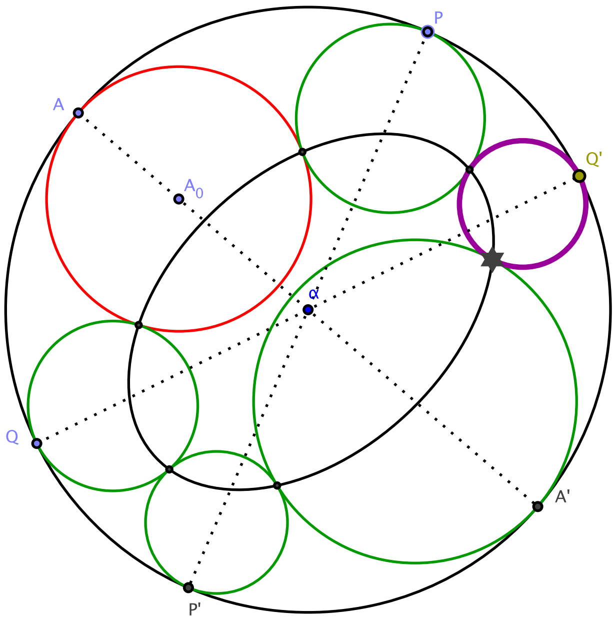
ALERTE ! LE THÉORÈME DES SEPT CERCLES EST DONC FAUX SI ON N'IMPOSE PAS UNE CONDITION COMME : « ILS SONT MUTUELLEMENT EXTÉRIEURS ! »



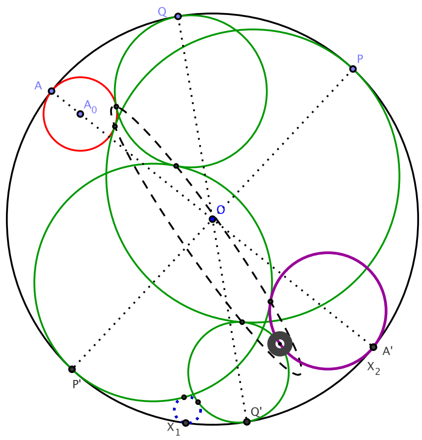
Il existe des situations où le cercle tangent en X ne provoquera pas d'autres intersections : mais dans ce cas il faut p et q du même signe. Mais si par exemple $q < p < 0$, ET si l'on impose à C_P et C_Q de ne pas se croiser, alors C_P qui est coincé en dessous de C_Q aura un diamètre inférieur à celui de C_A (je parle des cercles dans le demi-plan de Poincaré ici) et nécessairement le cercle $C_{Q'}$ devra traverser le cercle C_A pour venir le tangenter. Il y aura donc toujours forcément des intersections de cercles, si l'on ne veut pas de telles intersections, il est obligatoire de prendre comme sixième cercle celui qui est tangent en

A' (et est représenté par la droite violette dans la figure). Cependant même dans ce cas il peut tout-à-faire exister des cercles qui se croisent. Ce que l'on peut dire en tout cas, c'est que si les six cercles n'ont pas de croisements alors seul $\mathsf{M} = \mathsf{A}'$ convient, validant le Théorème des sept cercles. □

J'aborde maintenant un aspect franchement déroutant. Sur la figure ci-dessous :



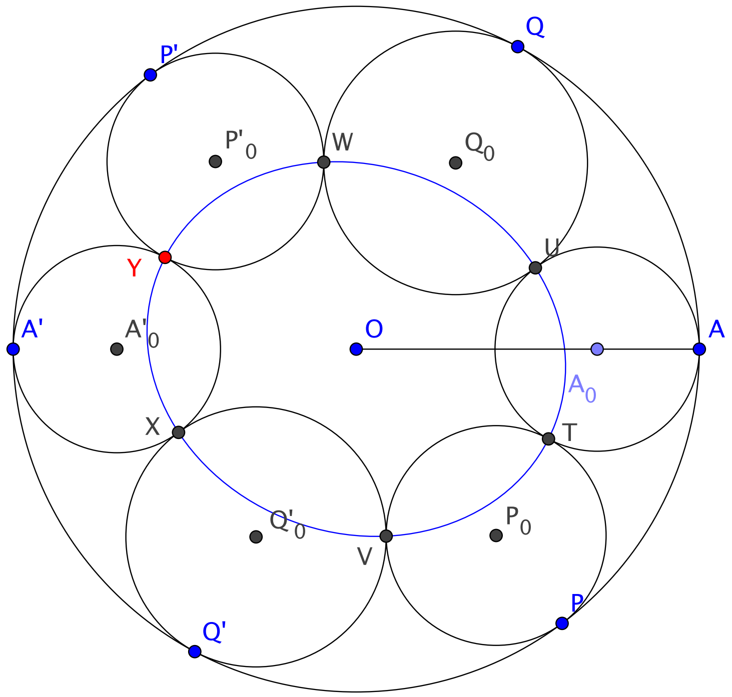
on a six cercles tangents, et on a demandé à GeoGebra de tracer la conique passant par cinq des six points de tangences. On a l'impression que l'ellipse passe par le sixième point. Eh bien c'est faux ! Certes lorsque l'on déforme la figure on voit que la conique est parfois une hyperbole, mais le problème n'est pas là. Il existe des domaines des paramètres où il est flagrant que le sixième point n'est pas sur la conique :



Par contre il existe de larges zones pour les paramètres de la figure pour lesquelles on a vraiment l'impression que le sixième point appartient à la conique. En revenant à nos notations de notre demi-plan de Poincaré, et en se contentant de configurations avec des diamètres, tout dépend rationnellement de **y**, **p**, **q**. Six points sont sur une conique si un certain déterminant s'annule. Ce déterminant va être une expression rationnelle en **y**, **p**, **q**. Comment peut-il s'annuler sur un ouvert sans s'annuler partout ? c'est IMPOSSIBLE. Donc notre deuxième figure PROUVE que la première était une ILLUSION. Et je peux vous assurer que lorsque l'on s'amuse avec GeoGebra c'est une illusion tenace ! [1]

Pour en avoir le coeur net, j'ai voulu faire les calculs, mais c'est très très volumineux, alors j'ai utilisé un logiciel de calcul formel. Après de longues minutes de préparation puis de calcul il m'a prétendu que le déterminant n'était pas nul, ce qui à l'époque me surprenait puisqu'au contraire je voulais prouver qu'il y avait une ellipse. Finalement, aussi pour faciliter la vérification géométrique que les formules que je mettais comme instructions à Maple pour calculer les coordonnnées des points étaient correctes, j'ai pris un cas où **A**, **P**, **Q** sont fixes et seul le rayon **r** du disque tangent en **A** est variable (j'ai aussi fait vérifier par l'algèbre que toutes les appartenances aux différents cercles étaient valides). Pour ces calculs, je suis revenu aux points dans le cercle initial, et je me suis arrangé pour que **A**, **P**, et **Q** soient rationnels, de sorte que tous les points de la figure sont données par des expressions rationnelles en **r**, évitant ainsi les nombres en figure flottante.

Entretemps j'ai changé un peu les notations, comme l'on voit sur la figure suivante :



1. que l'on peut dissiper au sein de GeoGebra en zoomant de nombreuses fois. . . *cf.* figures qui suivent.

On note r le rayon du cercle tangent en A. On a $\mathsf{P} = (3/5, -4/5)$ et $\mathsf{Q} = (8/17, 15/17)$. Ce choix autorise beaucoup de valeurs de r avec les six cercles sans autre intersection que leurs points de tangence. La liste complète des points de tangences, des centres des cercles et des rayons (si vous voulez vérifier. . .) est donnée par :

$$\begin{aligned}
T &= (1 - 2r + 4r^2)/(4r^2 + 1), -4r^2/(4r^2 + 1)\\
U &= (9 - 18r + 25r^2)/(25r^2 + 9), 30r^2/(25r^2 + 9),\\
V &= (131r^2 - 16 + 32r)/(30r + 34 + 181r^2), -2(113r^2 + 15 - 30r)/(30r + 34 + 181r^2)\\
W &= (541r^2 - 243 + 486r)/(72r + 405 + 1189r^2), 6(299r^2 + 54 - 108r)/(72r + 405 + 1189r^2)\\
X &= -(144 - 288r + 2545r^2)/(270r + 1825r^2 + 306), -270(-1 + r)^2/(270r + 1825r^2 + 306)\\
Y &= -(243 - 486r + 2644r^2)/(72r + 1924r^2 + 405), 324(-1 + r)^2/(72r + 1924r^2 + 405)\\
P_0 &= 3/5 + 3/5(-1 + r)/(1 + 4r), -4/5 - 4/5(-1 + r)/(1 + 4r)\\
Q_0 &= 8/17 + 72/17(-1 + r)/(9 + 25r), 15/17 + 135/17(-1 + r)/(9 + 25r)\\
P'_0 &= -3/5 + 147/5r/(4r + 45), 4/5 - 196/5r/(4r + 45)\\
Q'_0 &= -8/17 + 392/17r/(15r + 34), -15/17 + 735/17r/(15r + 34)\\
A'_0 &= -1 + 9(1 - r)/(9 + 40r),\\
r_A &= r, \qquad r_P = -(-1 + r)/(1 + 4r), \qquad r_Q = -9(-1 + r)/(9 + 25r)\\
r_{P'} &= 49r/(4r + 45), \qquad r_{Q'} = 49r/(15r + 34), \qquad r_{A'} = 9(1 - r)/(9 + 40r)
\end{aligned}$$

La feuille GeoGebra disponible ici :

`http://jf.burnol.free.fr/agreglessept_ellipse.ggb`

a été construite en lui donnant explicitement les points avec ces coordonnées, donc en commençant la liste par $A = (1, 0)$, $P = (3/5, -4/5)$ et $Q = (8/17, 15/17)$. Le point $A_0 = (1 - r, 0)$ est variable, si on veut le fixer à une valeur donnée (par exemple pour s'assurer avec le maximum de précision que l'ellipse calculée par GeoGebra est comme le déterminant calculé par Maple, à un multiple près) on peut par exemple taper $A_0 = (1/2, 0)$ dans sa fenêtre de Propriétés. Puis, pour revenir à un A_0 variable, on tape $A_0 = \mathrm{Point}[b]$. Cela le remet sur le rayon (en fait la figure a un point B caché, un peu écarté du centre du cercle, de sorte que A_0 n'est jamais mis au centre du cercle, car sinon la reprise en main de la figure est compliquée).

Ensuite, on demande à GeoGebra de tracer la conique passant par les cinq points X, V, T, U, W et on a l'impression qu'elle passe par Y. Pourtant Maple est formel, si l'on calcule le déterminant 6x6 nécessaire pour qu'il existe une conique passant par les six points on obtient : $16265457331200r^4(-63096673738482r^5 + 206175836416824r^6 - 587700807923466r^7 + 1479213796719978r^8 - 86161997889r + 7891898850 - 3678353292564r^3 - 25120368809659069r^{13} - 3304735017481698r^9 + 6565632821621634r^{10} - 11608210035278531r^{11} - 31249357021058227r^{15} + 666649687779r^2 + 9567123542150480r^{18} - 3097931369329600r^{19} + 463586586224000r^{20} + 30262494892087839r^{14} + 18189781106644985r^{12} + 27012512630136521r^{16} +$

$16697617458534r^4 - 18728729121287898r^{17})/((72r + 1924r^2 + 405)^2(270r + 1825r^2 + 306)^2(72r + 405 + 1189r^2)^2(30r + 34 + 181r^2)^2(25r^2 + 9)^2(4r^2 + 1)^2)$

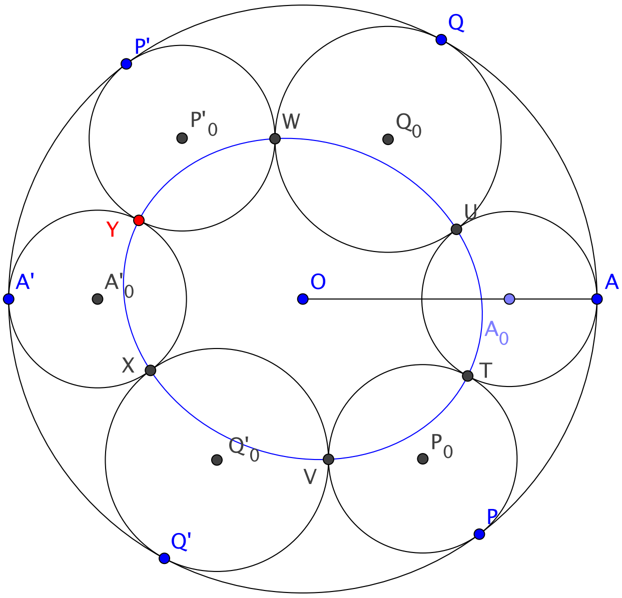
Et ça, ce n'est pas zéro ! Par exemple avec $r = \frac{1}{4}$ les points sont

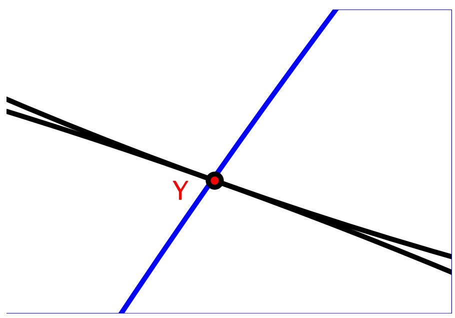
$$(T, U, V, W, X, Y) = (3/5, -1/5), (97/169, 30/169), (3/845, -466/845),$$
$$(-1403/7957, 4386/7957), (-3697/7801, -2430/7801), (-1147/2173, 729/2173)$$
$$(P_0, Q_0, P'_0, Q'_0, A'_0) = (3/8, -1/2), (16/61, 30/61), (-81/184, 27/46),$$
$$(-48/151, -90/151), (-49/76, 0)$$
$$(r, r_P, r_Q, r_{P'}, r_{Q'}, r_{A'}) = 1/4, 3/8, 27/61, 49/184, 49/151, 27/76$$

On forme avec (T, U, V, W, X, Y) la matrice avec des lignes $(x^2, y^2, xy, x, y, 1)$ utilisant les coordonnées cartésiennes de chacun des six points. Il existe une conique qui passe par eux si et seulement si le déterminant est nul. Or le déterminant est l'expression ci-dessus. Pour $r = \frac{1}{4}$ il vaut :

$$\frac{474977229005316112794604 89216}{2195426221991204356828346092225} \neq 0$$

Le point Y n'est PAS sur l'ellipse ! !





Voici l'équation de cette ellipse :

$$2{,}615\,458\ldots x^2 + 3{,}236\,590\ldots y^2 + 0{,}533\,194\ldots xy - 0{,}021\,864\ldots x - 0{,}030\,366\ldots y = 1$$

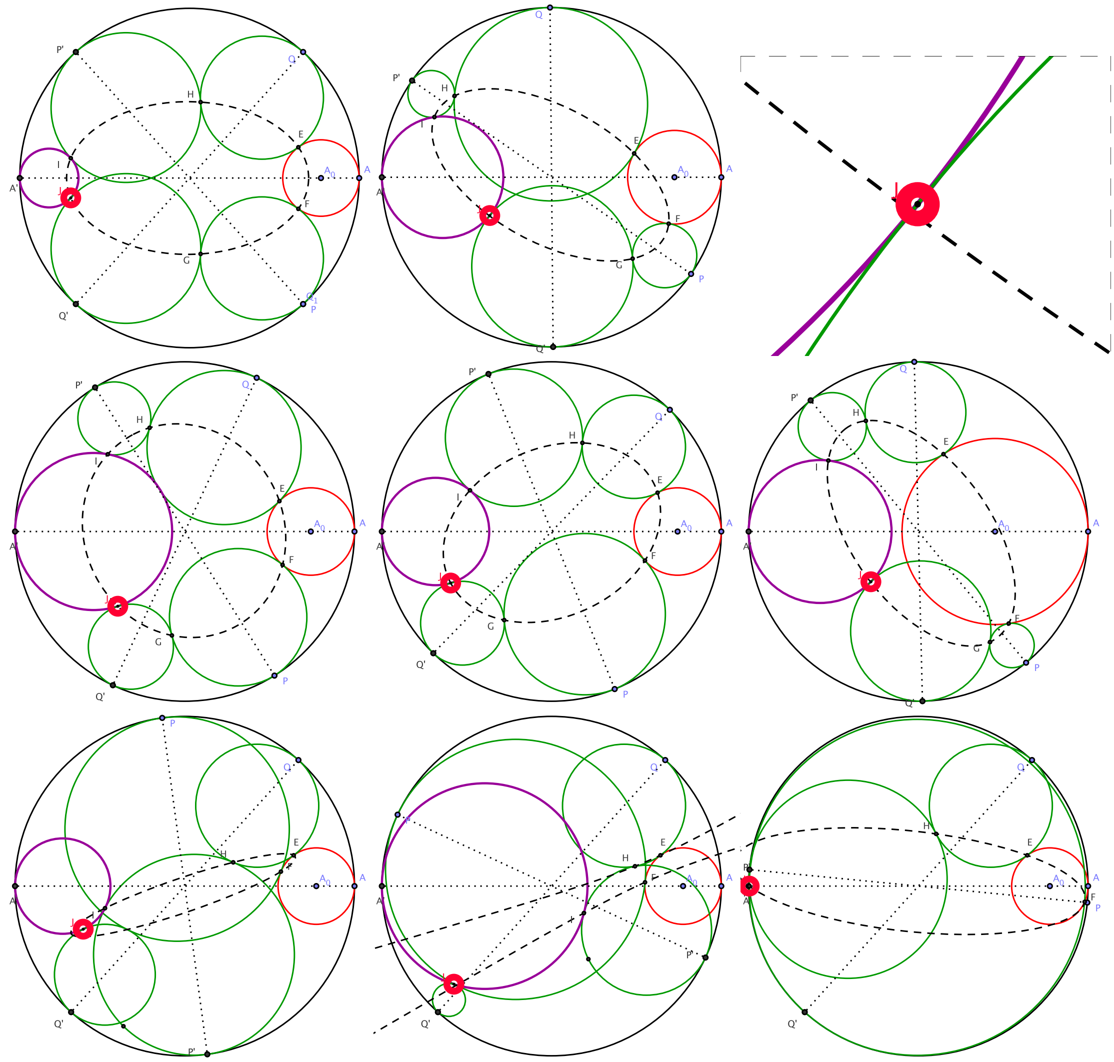
Et pour comparaison, voici l'équation de l'ellipse qui passe par T, U, V, W et Y (au lieu de X) :

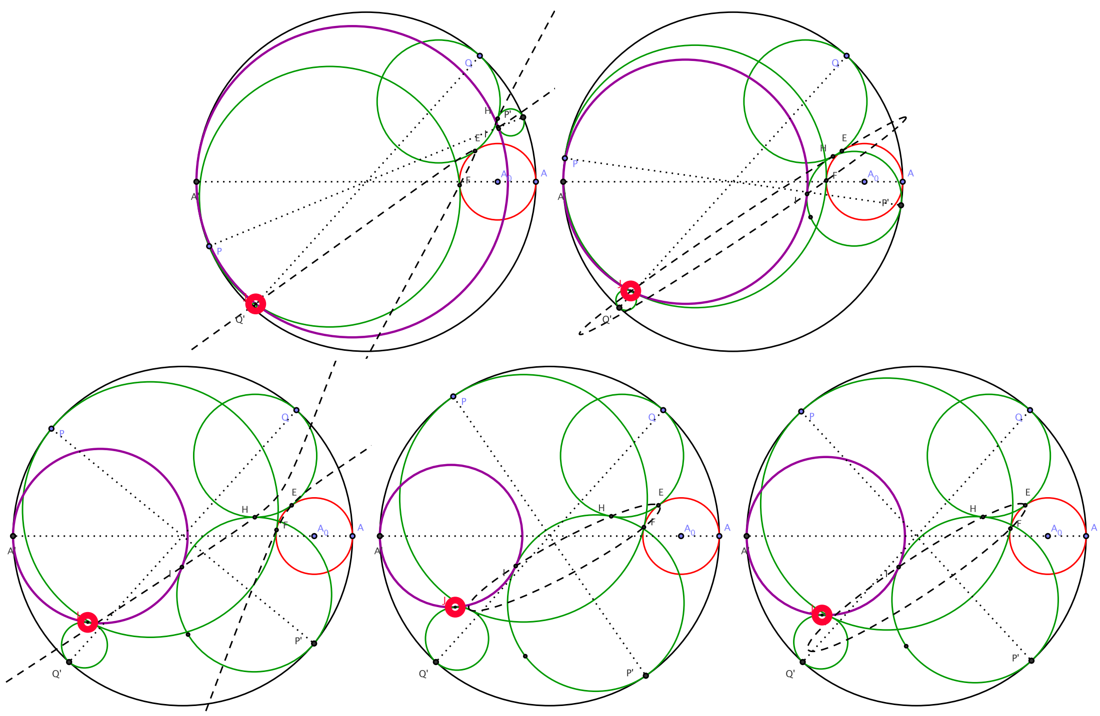
$$2{,}615\,631\ldots x^2 + 3{,}236\,559\ldots y^2 + 0{,}533\,235\ldots xy - 0{,}021\,963\ldots x - 0{,}030\,383\ldots y = 1$$

On a donné ici des approximations décimales aux coefficients exacts qui sont des nombres rationnels. On peut aussi calculer que la distance de **Y** à l'ellipse passant par **X** est à peu près $\mathbf{2{,}630 \cdot 10^{-5}}$ et celle de **X** à l'ellipse passant par **Y** est $\mathbf{2{,}686 \cdot 10^{-5}}$. Ceci signifie que, si par exemple le rayon du cercle principal sur le papier ou à l'écran est de **4cm** alors ces distances sont à peine plus qu'un **micron** ! (millième de millimètre). Ce qui est hallucinant c'est que ces ordres de grandeur semblent tout-à-fait représentatifs de ce qui se passe d'une manière générale, lorsque les cercles tangents sont mutuellement extérieurs. Il semble qu'on n'arrive à éloigner **Y** de la conique uniquement lorsqu'il y a des croisements entre cercles. Une feuille GeoGebra est disponible ici :

`http://jf.burnol.free.fr/agreglessept_ellipsequirendfou.ggb`

La première image présente une symétrie, c'est la seule pour laquelle le point (noté **J**) est sur l'ellipse. La seconde est accompagnée d'un zoom. Suivent des configurations plus éloignées et celles où l'on a réussi à éloigner le point de la conique.





Seules les configurations avec des cercles se croisant semblent pouvoir écarter **Y** de la conique définie par les cinq autres points. Et encore, pas toujours, même si la conique est une hyperbole (il y a aussi des configurations exceptionnelles avec la conique constituée de deux droites se croisant).