Dérivées d'une fonction réciproque, formules de Lagrange

Jean-François Burnol, 19 septembre 2009

Si f est une fonction de la variable x sur un intervalle I, dérivable, avec f' partout non nulle, alors f est soit strictement croissante soit strictement décroissante et elle établit une bijection de I sur son image $J = f(I)$ (qui est aussi un intervalle). La fonction réciproque $g = f^{-1}$, de la variable y, est à son tour dérivable et on a pour tout y de J :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Tout cela est démontré (plus ou moins correctement) dans tous les livres, je n'y reviens pas.

Sauf sur un point, puisque j'ai juste supposé $f' \neq 0$ et non pas directement comme à l'habitude $f' > 0$ ou $f' < 0$. Mais on est bien sûr nécessairement dans l'un de ces deux cas par le « théorème de Darboux » sur les fonctions dérivées et le théorème des valeurs intermédiaires. On peut l'établir ainsi (et ce cas particulier entraîne le théorème de Darboux général) : soit $a < b$ et supposons $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Donc $f(a)$ est strictement inférieur aux $f(x)$ pour $x > a$ proche de a, donc a n'est pas un maximum local et encore moins global de f sur $[a, b]$. De même $f(x) > f(b)$ pour $x < b$ et proche de b donc b n'est pas non plus un point où f atteint un maximum local. Il existe un point c de $[a, b]$ tel que $f(c)$ est maximal et donc ce c est intérieur. Donc (argument du lemme de Rolle) $f'(c) = 0$. Ainsi on a une contradiction. De même avec un minimum global dans le cas $f'(a) < 0 < f'(b)$. Donc $f'(a)$ et $f'(b)$ ont le même signe.

Supposons maintenant que $f^{(n)}(x_0)$, pour $n \geq 2$, existe en un certain x_0 de I. Alors $g^{(n)}(y_0)$ existe au point $y_0 = f(x_0)$. Cela découle (avec une petite récurrence) du théorème de dérivation des fonctions composées appliqué à la formule $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Calculons les premières dérivées : pour cela je précise que tous les signes de dérivations appliqués à g sont par rapport à y et pour ceux appliqués à f ils sont par rapport à x.

$$(1) \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{dans ceci et la suite : } x = g(y)$$

$$(2) \qquad g''(y) = \frac{-f''}{(f')^3}(x)$$

$$(3) \qquad g^{(3)}(y) = \frac{-f^{(3)}f' + 3(f'')^2}{(f')^5}(x)$$

J'ai calculé $g^{(4)}$ et $g^{(5)}$ mais l'officialiser ici serait faire prendre un risque à ma réputation d'infaillibilité... seul faire le calcul par vous même pourrait vous être (très vaguement) bénéfique. J'insiste sur le fait que par exemple la formule ci-dessus donne la valeur de $g^{(3)}(y_0)$ sous la seule hypothèse que f est trois fois dérivable au point $x_0 = g(y_0)$ (et pas nécessairement dans un voisinage de x_0, cependant bien sûr f'' doit exister dans un voisinage de x_0).

J'en viens maintenant aux **Formules de Lagrange**. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe, donc on a le développement limité :

$$y = f(x) = y_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

et aussi puisque nous venons d'expliquer que $g^{(n)}(x_0)$ existe :

$$x = g(y) = x_0 + b_1(y - y_0) + \cdots + b_n(y - y_0)^n + o((y - y_0)^n)$$

Rappel : $a_1 \neq 0$ et $b_1 = \frac{1}{a_1}$. On voudrait une expression pour b_n en fonction des a_j. On pourrait commencer par calculer les DL à l'ordre n en $x-x_0$ des puissances $(y-y_0)^2, \ldots, (y-y_0)^n$, à partir de celui de $y-y_0$, puis les réinjecter dans le DL de x comme fonction de $y - y_0$: cela clairement va nous donner par unicité des équations linéaires en les b_j, à coefficients des polynômes en les a_j, et formant un système triangulaire qui permet d'obtenir d'abord b_1, puis b_2, etc..., et enfin b_n. Bonne chance !

Un raisonnement hyper-astucieux va nous donner une formule intrinsèque (j'ai dit intrinsèque, pas explicite !), la formule de Lagrange. Mais je dois faire un petit préambule : on dira qu'une fontion $k(x)$ définie au voisinage de x_0 (mais pas forcément en x_0) a un pôle en x_0 s'il existe un polynôme sans terme constant T (dont vous prouverez l'unicité) tel que $k(x) = T(\frac{1}{x-x_0}) + o(\frac{1}{x-x_0})$ lorsque x tend vers x_0 (attention, avec cette définition $\log|x|$ a un pôle à l'origine, avec $T = 0$, ce qui peut choquer mais nous convient ici). Le coefficient c_1 dans le développement $T(\frac{1}{x-x_0}) = \sum_{1\leq j\leq N} \frac{c_j}{(x-x_0)^j}$ est appelé le Résidu de k en x_0. En fait il s'agit plutôt du résidu de la forme différentielle $k(x)dx$ mais je ne veux pas faire un long détour. Bref, on a ce passage aux résidus pour les fonctions avec un pôle en x_0, et c'est un truc linéaire.

Dorénavant je supposerai pour simplifier $x_0 = y_0 = 0$. À nouveau :

$$y = a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

$$x = b_1y + \cdots + b_ny^n + o(y^n)$$

La fonction x est n fois dérivable à l'origine par rapport à y donc x' l'est $n-1$ fois et par Taylor-Young on a le développement limité :

$$x'(y) = b_1 + 2b_2y + \cdots + nb_ny^{n-1} + o(y^{n-1})$$

$$\frac{x'(y)}{y^n} = \frac{b_1}{y^n} + \frac{2b_2}{y^{n-1}} + \cdots + \frac{nb_n}{y} + o(y^{-1})$$

L'équation ci-dessus montre que comme fonction de y, $\frac{x'(y)}{y^n}$ a un pôle à l'origine de résidu nb_n. Mais le truc qui a un résidu c'est en vérité la forme différentielle $\omega = \frac{x'(y)}{y^n}dy$. Si l'on repasse à la variable x, on doit écrire $\omega = \frac{x'(y)}{y^n}y'(x)dx$ car $dy = y'(x)dx$. Or $x'(y)y'(x) = 1$ (sic !). Donc on est en train de parler de $\frac{1}{y^n}dx$ ou encore de $\frac{1}{y^n}$ vu comme comme fonction de x ! ! ! Conclusion (une preuve plus explicite va suivre, je vous rassure) : nb_n est le résidu de la partie polaire de $\frac{1}{y^n}$ à l'origine, ou encore, après multiplication par x^n et application de la formule de Taylor-Young et unicité des développements limités :

$$nb_n = \frac{1}{(n-1)!} (\frac{d}{dx})^{n-1}\bigg|_{x=0} \frac{x^n}{y^n}$$

Ceci est la **Formule de Lagrange**.

Si l'on revient juste une seconde à nos notations initiales on a donc :

$$(\frac{d}{dy})^n\bigg|_{y=f(x_0)} f^{-1}(y) = (\frac{d}{dx})^{n-1}\bigg|_{x=x_0} \left(\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\right)^n$$

Formule que vous trouverez plus ou moins inspirante. . . en fait elle est plus utile en oubliant les dérivées et en se rappelant que l'on trouve nb_n comme le $(n-1)^e$ coefficient du développement de $(a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots)^{-n}$.

Pour certaines séries cela permet de déterminer les séries inverses, par exemple on peut voir que la trisection de l'angle (qui revient à résoudre une certaine équation cubique) est liée à une certaine fonction hypergéométrique... mais bon je dis ça en passant, pas de panique !

Ici j'ai fait des hypothèses minimales, alors je suis confronté à certaines difficultés par rapport à un exposé où par exemple on prendrait $y(x)$ infiniment dérivable. Ainsi il n'est pas évident que la fonction $\frac{x}{y}$, ou de manière équivalente $\frac{y}{x}$, vue comme fonction de x et prolongée par continuité en zéro soit dérivable $n-1$ fois en 0. Et pourtant on en a besoin pour exprimer la **formule de Lagrange** :

$$nb_n = \frac{1}{(n-1)!} (\frac{d}{dx})^{n-1}\Big|_{x=0} \frac{x^n}{y^n}$$

Attention ! il est évident que $\frac{x}{y}$ (ou $\frac{y}{x}$) admet un développement limité :

$$\frac{y}{x} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Il n'est pas immédiat que $\frac{y}{x}$ ait bien $n-1$ dérivées à l'origine. **Ce point est traité dans une autre fiche**. Je l'admets ici.

On notera que la formule de Lagrange s'écrit aussi :

$$nb_n = \frac{1}{(n-1)!} (\frac{d}{dx})^{n-1}\Big|_{x=0} \left(\frac{1}{a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}}\right)^n$$

En effet, les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ de $(\frac{x}{y})^n$ ne dépendent que des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ de $\frac{x}{y}$. D'ailleurs nos arguments du début de cette fiche, mis en forme, permettraient d'affirmer qu'il existe des polynômes universels tels que $b_1 = 1/a_1$, $b_2 = P_2(a_1, a_2)/a_1^3$, ..., $b_n = P_n(a_1, \ldots, a_n)/a_1^{2n-1}$. Du coup on pourrait d'emblée remplacer le vrai $y(x)$ par le polynôme $a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Ainsi on pourrait si l'on voulait supposer y de classe C^∞ (donc aussi x comme fonction de y au voisinage de zéro). Il suffirait alors de développer la théorie des formes différentielles C^∞ et de prouver l'invariance du résidu sous changement de variable par difféomorphisme C^∞.

Ici je ne suis pas cette voie et me contente d'arguments ad hoc suffisants, sans même remplacer le y d'origine par son polynôme de Taylor, même si cela a l'inconvénient que je dois renvoyer à une autre fiche pour la preuve que $\frac{y}{x}$ a $n-1$ dérivées à l'origine. Revenons à :

$$\frac{x'(y)}{y^n} = \frac{b_1}{y^n} + \frac{2b_2}{y^{n-1}} + \cdots + \frac{nb_n}{y} + o(y^{-1})$$

Multipliant par $y'(x)$ et utilisant le fait que $o(y^{-1}) = o(x^{-1})$ et que $y'(x) \sim_{x\to 0} a_1$, et surtout que $x'(y)y'(x) = 1$, on obtient :

$$\frac{1}{y^n} = b_1\frac{y'}{y^n} + 2b_2\frac{y'}{y^{n-1}} + \cdots + nb_n\frac{y'}{y} + o(x^{-1})$$

Soit $1 \leq j \leq n$. La fonction $x^j\frac{y'}{y^j} = y'(x)(\frac{x}{y(x)})^j$ est $(n-1)$ fois dérivable à l'origine donc admet par Taylor-Young un développement limité à cet ordre, et par conséquent $\frac{y'}{y^j}$ admet un développement polaire à l'origine (avec un pôle d'ordre au plus j ; attention pour $j > n$ on n'a plus assez de termes disponibles dans le développement limité pour qu'après division par x^j on ait l'existence d'une partie polaire au sens définie plus haut).

Supposons $2 \leq j \leq n$. On veut montrer que le résidu est nul. Cela va résulter du fait que $\frac{y'}{y^j}$ est une dérivée : $\frac{y'}{y^j} = \frac{-1}{j-1}\frac{d}{dx}\frac{1}{y^{j-1}}$. Écrivons :

$$\frac{1}{y^{j-1}} = \frac{g_j(x)}{x^{j-1}} \qquad \text{avec} \qquad g_j(x) = (x/y)^{j-1}$$

Alors :

$$-(j-1)\frac{y'}{y^j} = \frac{d}{dx}\frac{1}{y^{j-1}} = \frac{d}{dx}\frac{g_j(x)}{x^{j-1}} = \frac{xg_j'(x) - (j-1)g_j(x)}{x^j}$$

Or g_j est $(n-1)$ fois dérivable en 0, donc g_j' l'est $(n-2)$ fois, donc admet un DL à l'ordre $n-2$, qui est d'ailleurs obtenu en dérivant formellement celui pour g_j donc $xg_j'(x)$ admet un DL à l'ordre $n-1$ et dans la combinaison $xg_j'(x) - (j-1)g_j(x)$ le coefficient de la puissance x^{j-1} est nul. Donc $-(j-1)\frac{y'}{y^j}$ admet un pôle à l'origine de résidu nul. CQFD.

Et pour $j = 1$, on a $\frac{y'}{y} = \frac{a_1+o(1)}{a_1x+o(x)} = \frac{1}{x}(1 + o(1))$: pôle d'ordre 1 et résidu 1 à l'origine. En conclusion, par la formule

$$\frac{1}{y^n} = b_1\frac{y'}{y^n} + 2b_2\frac{y'}{y^{n-1}} + \cdots + nb_n\frac{y'}{y} + o(x^{-1})$$

la fonction $\frac{1}{y^n}$ de la variable x présente un pôle d'ordre n à l'origine dont le résidu est précisément nb_n. C'est le Théorème de Lagrange.

Il est vraiment remarquable que trouver la série réciproque à

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

consiste exactement à calculer les résidus des puissances de l'inverse $\frac{1}{y}$! Comme quoi les nombreux étudiants qui confondent les deux sens différents de la notation f^{-1} sont peut-être après tout de grands intuitifs ! (à propos ceux qui pensent que $f^{(-1)}$ comme notation pour la fonction réciproque résout tous les problèmes se trompent car logiquement cela devrait désigner plutôt une primitive compte tenu du sens habituellement donné à $f^{(n)}$...)

Une variante concerne l'équation implicite $z - \varepsilon\phi(z) = w$, où ε est un petit paramètre. Sous des conditions non précisées ici il y aura pour ε petit une unique solution $z(w, \varepsilon)$. Lagrange en donne un développement en série en les puissances de ε :

$$z(w, \varepsilon) = w + \varepsilon\phi(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dw}\phi(w)^2 + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!}(\frac{d}{dw})^{n-1}\phi(w)^n + \dots$$

Si l'on contemple ensuite un peu sidéré l'équation $z - \varepsilon\frac{z-x_0}{f(z)-f(x_0)} = w$ et si l'on écrit mystérieusement $x = z(x_0, f(x) - f(x_0))$ on retombe, très formellement, sur nos formules !