L'inégalité de Kedlaya

Jean-François Burnol, 15 octobre 2011

1 L'inégalité arithmético-géométrique

La magnifique démonstration par Cauchy de l'inégalité, pour les nombres réels positifs,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad \textbf{[A]}$$

à partir de $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ à été reproduite dans tous les traités d'Analyse du dix-neuvième siècle, vous la retrouverez (plus ou moins bien rédigée...) sans peine sur le net. Qu'une récurrence donne **[A]** lorsque n est une puissance de deux était évident, et l'astuce de Cauchy permet de redescendre des puissances de deux à n'importe quel n (essayez tout seul avec $n = 3$ pour voir !). En 1906, Jensen explique comment le raisonnement de Cauchy se généralise pour établir à partir de :

$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \;, \qquad \textbf{[B]}$$

les inégalités, pour $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, $\lambda_j \geqslant 0$, λ_j **rationnel** :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \;. \qquad \textbf{[C]}$$

Lorsque f est continue, un passage à la limite donne la validité de l'**Inégalité de Jensen discrète [C]** aussi pour les coefficients λ_j **réels**, et en particulier pour $n = 2$:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \implies f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \;. \qquad \textbf{[D]}$$

Jensen prouve que la convexité au point milieu **[B]** implique la continuité (à l'intérieur de l'intervalle) dès que f est bornée supérieurement, et donc aussi **[C]** avec des coefficients réels, et en particulier **[D]**.

On obtient **[A]** à partir de **[C]** avec $f(x) = \exp(x)$, $\lambda_j = \frac{1}{n}$, et en renommant les variables. Le raisonnement direct de Cauchy est tellement joli que j'étais resté persuadé que c'était chez lui que l'on trouvait déjà la notion de convexité mise en avant par Jensen (parmi les prédécesseurs de Jensen ayant considéré les inégalités **[B]** ou **[D]** on trouve Hermite, Hadamard, Hölder, et un nom en S, Stolz ; Jensen fut le premier à introduire la terminologie « fonctions convexes », et son article est notable pour d'autres aspects comme la version « continue », c'est-à-dire avec des intégrales, de l'inégalité barycentrique **[C]**, ou encore la notion de log-convexité, même si le fait qu'une somme de fonctions log-convexes soit aussi log-convexe doive se lire entre les lignes, car il n'apparaît que dans le cas particulier des sommes d'exponentielles).

Les inégalités barycentriques générales [C] avaient déjà été prouvées par Hölder en 1889, avec comme point de départ la condition $f'' \geqslant 0$. Il serait donc plus légitime de parler d'inégalités de Hölder, mais ce nom est déjà réservé pour d'autres fameuses inégalités… en fait dues à un dénommé Rogers ! (et à propos de ces « inégalités de Hölder », ce dernier n'en avait pas donné la version pour les intégrales, qui apparaît dans l'article de … Jensen, et, pour les espaces mesurés généraux, est généralement attribuée à F. Riesz).

2 L'inégalité de Kedlaya

En 1994, Kedlaya, alors étudiant de première ou deuxième année dans une université américaine, démontre l'inégalité suivante, qui avait été conjecturée par Holland en 1992, et en réalité déjà publiée par Nanjundiah en 1952, mais sans preuve :

Théorème 1 (Kedlaya, 1994). *Soit* $x_1, \ldots, x_n$ *des nombres réels strictement positifs. La moyenne arithmétique des nombres*

$$x_1,\ \sqrt{x_1 x_2}, \ldots,\ \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

est majorée par la moyenne géométrique des nombres

$$x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\ ,$$

avec égalité seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

Notez bien sûr que par l'inégalité arithmético-géométrique, la moyenne arithmétique de la première ligne est majorée par la moyenne arithmétique de la deuxième ligne ; le théorème de Kedlaya dit quelque chose qui est meilleur que cette majoration immédiate.

Les moyennes géométriques et arithmétiques sont des cas particuliers des **moyennes de puissances** de nombres réels positifs $x_1, \ldots, x_n$:

$$H_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{[E]}$$

Si $p < 0$ on pose $H_p = 0$ lorsque l'un des x_i est nul ; et pour H_0 on prend la moyenne géométrique car elle est la limite des H_p pour $p \to 0^+$. La fonction ainsi définie sur la droite réelle $p \mapsto H_p(x_1, \ldots, x_n)$ est continue, **croissante**, tend vers $\min(x_1, \ldots, x_n)$ en $-\infty$ et vers $\max(x_1, \ldots, x_n)$ en $+\infty$. La moyenne géométrique est pour $p = 0$, la moyenne harmonique pour $p = -1$, la moyenne arithmétique pour $p = 1$. Si vous êtes dérouté(e) par ces affirmations, *il faut vous renseigner dessus*, on le trouve partout, par exemple dans mon texte :

http://jf.burnol.free.fr/agregnormeslp.pdf

Ce texte voulait surtout parler des p-normes, et dans ce contexte on est habitué à se restreindre à $p \geqslant 1$, car c'est seulement alors que l'inégalité de Minkowski va dans le bon sens. Mais $0 < p < 1$, $p = 0$ et $p < 0$ sont aussi intéressants et le texte mis en référence ci-dessus parle **aussi** de ces valeurs de p.

En 1996, Mond et Pečarić ont étendu l'inégalité de Kedlaya en une version plus générale :

Théorème 2. *Soit* $r < s$ *deux nombres réels, et* $x_1, \ldots, x_n$ *des nombres réels strictement positifs. Notons, pour* $1 \leqslant j \leqslant n$ *:*

$$\left(\frac{x_1^r + \cdots + x_j^r}{j}\right)^{\frac{1}{r}} = y_j \leqslant z_j = \left(\frac{x_1^s + \cdots + x_j^s}{j}\right)^{\frac{1}{s}} . \qquad \textbf{[F]}$$

Alors

$$\left(\frac{y_1^s + \cdots + y_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\frac{z_1^r + \cdots + z_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} , \qquad \textbf{[G]}$$

avec égalité seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

C'est cette inégalité que je me propose de prouver ici (*en laissant au lecteur l'analyse des cas d'égalités*), pour $0 < r < s$. Ma preuve va suivre les indications données dans un deuxième article de Kedlaya, qui y traite une version encore plus générale (avec des poids) de son Théorème initial **[1]**. Les cas $r < 0 < s$ et $r < s < 0$ peuvent être obtenus par les mêmes raisonnements, les inégalités intermédiaires allant parfois dans des sens opposés.

Un passage à la limite donne les cas $r = 0$ ou $s = 0$ et ainsi en particulier l'inégalité de Kedlaya qui correspond à $r = 0$, $s = 1$.

Il est malcommode de mener la discussion des cas d'égalités dans une inégalité obtenue par un argument de passage à la limite ; je conseille donc aux courageux d'essayer de prouver directement le Théorème 1 en imitant la preuve donnée ici pour $0 < r < s$: des multiplications remplacent des additions, et l'inégalité de Hölder remplacera à un moment donné l'emploi de l'inégalité de Minkowski.

Je suggère d'écrire en « toutes lettres » ce que dit le Théorème de Kedlaya-Mond-Pečarić pour $r = -1$ et $s = 1$: une inégalité avec des moyennes harmoniques et arithmétiques emboîtées qui vous donnera une idée de la complexité de la situation ! Comme souvent, traiter le cas plus général facilite paradoxalement l'obtention de la preuve. Vérifiant en cela un adage d'Abel, sa (relative) facilité indique que l'on a un bon énoncé.

Preuve du Théorème **[2]** *dans le cas* $0 < r < s$. L'analyse des cas d'égalité sera laissée au lecteur. Il s'agit de montrer :

$$n^{1-\frac{r}{s}}\left(y_1^s+\cdots+y_n^s\right)^{\frac{r}{s}} \leqslant z_1^r+\cdots+z_n^r \qquad \textbf{[H]}$$

qui est vrai pour $n = 1$, et donc il *suffira* de montrer, pour une preuve de **[H]** par récurrence, qu'avec $n+1$ variables x_j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$ on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$(n+1)^{1-\frac{r}{s}}\left(y_1^s+\cdots+y_{n+1}^s\right)^{\frac{r}{s}} - n^{1-\frac{r}{s}}\left(y_1^s+\cdots+y_n^s\right)^{\frac{r}{s}} \leqslant z_{n+1}^r = (n+1)^{-\frac{r}{s}}\left(x_1^s+\cdots+x_{n+1}^s\right)^{\frac{r}{s}} \qquad \textbf{[I]}$$

Utilisons la notation suivante pour les normes de Minkowski (ce sont des normes car $\frac{s}{r} \geqslant 1$) :

$$\left\|t_1, t_2, \ldots, t_m\right\|_{s/r} = \left(|t_1|^{\frac{s}{r}} + |t_2|^{\frac{s}{r}} + \cdots + |t_m|^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}} \qquad \textbf{[J]}$$

L'équation **[I]** se réécrit :

$$(n+1)^{1-\frac{r}{s}}\left\|y_1^r, \ldots, y_{n+1}^r\right\|_{s/r} - n^{1-\frac{r}{s}}\left\|y_1^r, \ldots, y_n^r\right\|_{s/r} \leqslant (n+1)^{-\frac{r}{s}}\left\|x_1^r, \ldots, x_{n+1}^r\right\|_{s/r}, \qquad \textbf{[K]}$$

soit encore

$$\left\|(n+1)y_1^r, \ldots, (n+1)y_{n+1}^r\right\|_{s/r} - \left\|x_1^r, \ldots, x_{n+1}^r\right\|_{s/r} \leqslant (n+1)^{\frac{r}{s}} n^{1-\frac{r}{s}}\left\|y_1^r, \ldots, y_n^r\right\|_{s/r} \qquad \textbf{[L]}$$

Avec une norme on a $\|u\| - \|v\| \leqslant \|u-v\|$, et il suffira donc de vérifier

$$\left\|(n+1)y_1^r - x_1^r, \ldots, (n+1)y_{n+1}^r - x_{n+1}^r\right\|_{s/r} \leqslant (n+1)^{\frac{r}{s}} n^{1-\frac{r}{s}}\left\|y_1^r, \ldots, y_n^r\right\|_{s/r} \qquad \textbf{[M]}$$

Or, avec par convention disons $y_0 = 0$, et en utilisant la convexité de $t \mapsto t^{s/r}$:

$$0 \leqslant (n+1)y_j^r - x_j^r = (n+1)y_j^r - (jy_j^r - (j-1)y_{j-1}^r) = (n+1-j)y_j^r + (j-1)y_{j-1}^r \qquad \textbf{[N]}$$

$$((n+1)y_j^r - x_j^r)^{\frac{s}{r}} \leqslant n^{\frac{s}{r}-1}\left((n+1-j)y_j^s + (j-1)y_{j-1}^s\right) \qquad \textbf{[O]}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}((n+1)y_j^r - x_j^r)^{\frac{s}{r}} \leqslant n^{\frac{s}{r}-1}\sum_{j=1}^{n+1}\left((n+1-j)y_j^s + (j-1)y_{j-1}^s\right) = n^{\frac{s}{r}-1}(n+1)\sum_{j=1}^{n} y_j^s \qquad \textbf{[P]}$$

d'où **[M]** en prenant la puissance r/s-ieme. Le Théorème est démontré ! □

Références

[1] A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*, 1ère partie, Analyse algébrique, Paris, 1821. Et Œuvres complètes, IIe série, VII.

[2] C. Hermite, *Sur deux limites d'une intégrale définie*, Mathesis, 3 (1883), p. 82.

[3] O. Hölder, *Über einen Mittelwertsatz*, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen (1889), 38-47.

[4] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math., 30 (1906), 175-193.

[5] K. Kedlaya, *Proof of a Mixed Arithmetic-Mean, Geometric-Mean Inequality*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 101, No. 4 (1994), 355-357.

[6] K. Kedlaya, *A Weighted Mixed-Mean Inequality*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 106, No. 4 (1999), 355-358.