Irrationalité de π^2

Jean-François Burnol, 26 novembre 2011

Introduction

Le nombre π est irrationnel, un résultat publié en 1768 par Jean-Henri Lambert.[1] Euler avait trouvé le développement en fraction continue du nombre e,[2] et le simple fait qu'il ne s'arrête pas prouve que e est irrationnel. Cependant on ne connaît pas de formule explicite pour les entrées du développement en fraction continue de π. La méthode de Lambert s'appuie sur un développement en fraction continue (en un sens généralisé) non pas d'un nombre, mais d'une fonction, la fonction cotangente (ou si l'on préfère, tangente ; Euler connaissait un développement en fraction continue de la fonction exponentielle).

Il s'agit d'un sujet véritablement fascinant, mais les preuves issues de l'approfondissement des travaux initiaux de Lambert sont de plus en plus raccourcies au fil des années et finissent par être un peu décourageantes : elles ne laissent aucune trace au néophyte de comment on est arrivé à les créer ! C'est le cas par exemple de la preuve de Niven de 1947 qui démarre par l'étude des intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2\cdot n!}\int_0^{\pi} u^n(\pi-u)^n \sin(u)\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

On prouve que *(1)* I_n est un polynôme en π, à coefficients entiers, de degré au plus n, et *(2)* $0 < \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\pi^{2n+1}}{n!}$. Montrer *(2)* est facile, montrer *(1)* un peu moins (il faut comprendre ce qui se passe lorsque l'on intègre par parties un grand nombre de fois) mais reste de niveau L1-L2.[3] Le fait que *(1)* et *(2)* ensemble impliquent l'irrationalité est une chose simple qui mérite d'être retenue : si $\pi = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, alors $\mathrm{B}^n\mathrm{I}_n$ est par *(1)* un nombre entier qui vérifie par *(2)* $0 < \mathrm{B}^n\mathrm{I}_n \leqslant \frac{\pi^{2n+1}\mathrm{B}^n}{n!}$ ce qui est impossible pour n grand puisqu'alors le terme de droite est < 1.

La technique utilisée ici pour établir l'irrationalité d'un nombre réel x est donc de trouver des polynômes P_n à coefficients entiers, de degrés d_n, avec $0 < |\mathrm{P}_n(x)| \leqslant u_n$ et u_n tendant suffisamment vite vers zéro : $\forall \mathrm{B} > 0\ \lim \mathrm{B}^{d_n} u_n = 0$. Parfois on peut y arriver avec des polynômes de degrés 1, c'est-à-dire on montre l'existence de nombres rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ avec $q_n x - p_n \to 0$ sans être jamais nul. Si x était un rationnel $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, un $|q_n x - p_n|$ non nul

nouvelle rédaction le 12/04/2014.

1. Les dates varient suivant mes sources : 1761, 1763, 1767, 1768, 1773... on a parfois dit que la preuve de Lambert était incomplète et ne devint rigoureuse qu'après une contribution de Legendre, mais R. Wallisser dans *On Lambert's proof of the irrationality of* π, in Algebraic number theory and Diophantine analysis, Graz, 1998 (Berlin, 2000), 521-530, insiste au contraire sur le caractère complet et novateur de la preuve.
2. $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]$
3. mais en France, on n'a plus droit qu'à une intégration par parties en L1 et au plus deux en L2.

vaudrait au minimum B^{-1}. L'idée ici pour prouver l'irrationalité de x est donc d'exhiber une suite d'approximants rationnels. On peut approfondir cette idée, et (c'est paradoxal peut-être) établir, à condition de disposer d'au moins une « bonne » suite d'approximants rationnels que x est mal approximable : $\exists A < \infty\, \exists C, \forall (p,q) \quad |x - \frac{p}{q}| \geqslant Cq^{-A}$.

Pour π^2, on pourrait naïvement espérer partir de la série $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ dont les sommes partielles s_n sont des nombres rationnels $p_n/q_n < \pi^2/6$. Comme $\pi^2/6 - p_n/q_n \sim 1/n$, on a $q_n\pi^2 - 6p_n \sim 6q_n/n$, et si par exemple $n = P$ est un nombre premier, alors nécessairement $q_n \geqslant P^2$, $6q_n/n \geqslant 6P$ et il est faux que $q_n\pi^2 - p_n \to 0$. Pour $e = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ par contre, la méthode marche.

Des mathématiciens très ingénieux et obstinés ont réussi à trouver des suites d'approximants rationnels à π ou π^2 prouvant leur irrationalité, et même (Hata, 1993) leur « mauvaise approximabilité » (ceci était déjà connu mais pas grâce à de « bons approximants », et de plus Hata avait ainsi amélioré les meilleurs A connus). Souvent les écarts $q_n x - p_n$ s'expriment à partir d'intégrales dont on se demande, comme à propos de celle exploitée par Niven, d'où elles viennent.

L'intégrale de Niven I_n est très liée à l'approche de Lambert : car I_n est le numérateur évalué en $\frac{\pi}{2}$ de la n^e réduite (convenablement normalisée) de la fraction continue de Lambert de la fonction cotangente. On pourrait écrire des livres de centaines de pages autour de ce développement en fraction continue, c'est un sujet fascinant. Le voici :

$$\frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = x\,\mathrm{ctg}(x) = 1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}} \tag{2}$$

Mon petit résumé ci-dessus se base sur un article de F. Beukers que je recommande :

http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/Pi-artikel.ps

L'objectif du présent texte est de décrire comment, en partant d'une question vraiment élémentaire et que l'on peut examiner au niveau L1-L2, on arrive à en conclure à l'irrationalité de π (de π^2 en fait). Dans un deuxième temps, et cette fois à un niveau mathématique plus élevé, j'expliquerai qu'en fin de compte on ne fait que retrouver les objets initialement considérés par Lambert.

La méthode

On sait que π est le premier zéro non nul de la fonction sinus, donc, on peut imaginer qu'encadrer cette fonction pourrait nous renseigner. L'inégalité

$$0 < x < \pi \implies 0 < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \tag{3}$$

est assez célèbre. Comme $\sin(x) = x(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots)$ on peut avoir l'idée de comparer avec $\exp(-x^2/6) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} - \dots$, et supputer que :

$$0 < x < \pi \implies 0 < \frac{\sin(x)}{x} < e^{-\frac{x^2}{6}} \ . \tag{4}$$

Si on se permet d'utiliser le produit infini de Euler :

$$\sin(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}) \ , \tag{5}$$

et la majoration $1 - h \leqslant e^{-h}$ pour $0 < h < 1$, on confirme (4) (puisque $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$). Il y a quelques mois, M[r] Queffélec avait demandé aux agrégatifs une preuve de cet encadrement (4) qui restât de niveau élémentaire et donc n'utilisât point le produit infini de Euler. Un escholier fit une contribution originale :

http://jf.burnol.free.fr/agregsinxsurx.pdf

Je reprends ici cette discussion et montre comment elle va nous mener à l'irrationalité de π^2.

En considérant la dérivée logarithmique de $\frac{\sin(x)}{x} e^{x^2/6}$ (fonction qui vaut 1 en $x = 0$ et que l'on espère décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$), on voit qu'il suffirait de prouver :

$$0 < x < \pi \implies \mathrm{ctg}(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x < 0 \ , \tag{6}$$

ou, écrit sous une forme plus commode :

$$0 < x < \pi \implies (3 - x^2)\sin(x) - 3x\cos(x) > 0 \ . \tag{7}$$

Voici un problème de niveau L1 ! Lorsque l'on dérive une première fois $(3-x^2)\sin(x) - 3x\cos(x)$, il y a un x qui se factorise ; on re-dérive alors après avoir retiré ce facteur et on tombe sur $x\sin(x)$. Autrement dit on peut obtenir (7) on partant de $\sin(x)$, qui est positif, en multipliant par x, qui est positif, et en intégrant, puis à nouveau en multipliant par x et en intégrant. On a le théorème suivant qui est motivé par notre démarche :

Théorème 1. *Il existe pour $n \geqslant 1$ des polynômes, uniques, P_n et Q_n tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dx}\Big(P_n(x)\sin(x) - Q_n(x)\cos(x)\Big) = xP_{n-1}(x)\sin(x) - xQ_{n-1}(x)\cos(x) \ , \tag{8}$$

avec $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$. Les polynômes P_n et Q_n sont à coefficients entiers, respectivement pairs et impairs, de degrés au plus n.

Comme $Q_{n+1}(0) = 0$:

$$P_{n+1}(x)\sin(x) - Q_{n+1}(x)\cos(x) = \int_0^x t(P_n(t)\sin(t) - Q_n(t)\cos(t))\, dt \ , \tag{9}$$

et il en résulte par une récurrence facile :

$$0 < x \leqslant \pi \implies 0 < \mathrm{P}_n(x)\sin(x) - \mathrm{Q}_n(x)\cos(x) < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} \quad (10)$$

On utilise $n = 2m+1$ et on évalue en $x = \pi$. Si $\pi^2 = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ alors :

$$0 < \boxed{\mathrm{B}^m \pi^{-1} \mathrm{Q}_{2m+1}(\pi)} < \frac{\pi^{2n}\mathrm{B}^m}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1} \qquad (n = 2m+1) \quad (11)$$

Le terme encadré devrait être un entier (on utilise que Q_n est impair donc $x^{-1}\mathrm{Q}_n(x)$ est un polynôme en x^2, de degré au plus $\frac{n-1}{2} = m$). Impossible pour $n = 2m+1$ grand.

Donc π^2 est irrationnel !

Je fais maintenant la preuve du Théorème 1. Soit A et B des polynômes réels. Pour que les polynômes réels P et Q vérifient

$$\frac{d}{dx}\Big(\mathrm{P}(x)\sin(x) - \mathrm{Q}(x)\cos(x)\Big) = x\mathrm{A}(x)\sin(x) - x\mathrm{B}(x)\cos(x)\ , \quad (12)$$

il est nécessaire et suffisant (rassembler les termes en sinus et cosinus et considérer là où ils s'annulent respectivement) que $\mathrm{P}' + \mathrm{Q} = x\mathrm{A}$ et $\mathrm{Q}' - \mathrm{P} = x\mathrm{B}$. Il s'agit donc d'établir :

Théorème 2. *Pour tous polynômes réels* A *et* B *il existe deux uniques polynômes réels* P *et* Q *vérifiant le système :*

$$\mathrm{P}' + \mathrm{Q} = x\mathrm{A} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Q}' - \mathrm{P} = x\mathrm{B} \quad (13)$$

Lorsque A *est pair et* B *est impair alors* P *est pair et* Q *est impair. Lorsque* A *et* B *sont à coefficients entiers alors* P *et* Q *sont à coefficients entiers. On a* $\max(\deg \mathrm{P}, \deg \mathrm{Q}) = 1 + \max(\deg \mathrm{A}, \deg \mathrm{B})$.

Preuve. Utilisons les polynômes complexes $\mathrm{X} = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{A} + i\mathrm{B}$. Un petit calcul prouve que le système (13) équivaut à l'équation dans $\mathbb{C}[x]$:

$$\mathrm{X} + i\mathrm{X}' = ix\mathrm{Y} \quad (14)$$

Comme la dérivation est « localement nilpotente » sur les polynômes, il y a pour tout polynôme complexe Y une unique solution polynomiale à l'équation (14), et elle est donnée par

$$\mathrm{X} = ix\mathrm{Y} - i(ix\mathrm{Y})' - (ix\mathrm{Y})'' + i(ix\mathrm{Y})''' + \cdots \quad (15)$$

Le degré de X est exactement un de plus que celui de Y. Et si Y est à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$ alors il en est de même de X. Ceci prouve l'existence et l'unicité pour P et Q et l'assertion sur les coefficients entiers et celle sur les degrés. On vérifie sur le système (13) que si A est pair et B impair, alors $(\mathrm{P}(-x), -\mathrm{Q}(-x))$ est aussi solution et donc, par unicité P est pair et Q impair. □

Donc en posant $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$ on a par récurrence des polynômes à coefficients entiers P_n et Q_n, pairs et impairs, avec $P_n + iQ_n = (ix)^n + \dots$, qui sont tels que

$$\frac{d}{dx}\left(P_{n+1}(x)\sin(x) - Q_{n+1}(x)\cos(x)\right) = xP_n(x)\sin(x) - xQ_n(x)\cos(x)\ . \tag{16}$$

Ceci prouve le Théorème et donc l'irrationalité de π^2.

Quelques compléments

Voici les premiers P_n et Q_n :

$$P_1 + iQ_1 = 1 + ix \tag{17}$$
$$P_2 + iQ_2 = 3 - x^2 + i3x \tag{18}$$
$$P_3 + iQ_3 = 15 - 6x^2 + i(15x - x^3) \tag{19}$$
$$P_4 + iQ_4 = 105 - 45x^2 + x^4 + i(105x - 10x^3) \tag{20}$$
$$P_5 + iQ_5 = 945 - 420x^2 + 15x^4 + i(945x - 105x^3 + x^5) \tag{21}$$

La propriété d'approximants de Padé

De notre encadrement, et par (im)parité on a la propriété :

$$P_n(x)\sin(x) - Q_n(x)\cos(x) = \mathcal{O}(x^{2n+1}) = \boldsymbol{o}(x^{2n}) \tag{22}$$

Ceci, compte tenu des degrés (et de $P_n(0) \neq 0$), dit (pour ceux qui connaissent ces sujets) que (P_n, Q_n) est une paire d'approximants de Padé et identifie $P_n/(Q_n/x)$ avec la n^{e} réduite du développement en fraction continue de $x\,\mathrm{ctg}(x)$.

On va montrer ici directement que l'équation (22) caractérise de manière unique (à un multiple près) le couple (P_n, Q_n).

Théorème 3. *La condition pour des polynômes réels* T *et* U *de degrés au plus n*

$$T(x)\sin(x) - U(x)\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n})\ , \tag{23}$$

n'est satisfaite que par $T = \lambda P_n$, $U = \lambda Q_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. On le montre par récurrence sur n. On a nécessairement $U(0) = 0$ et l'assertion est vraie pour $n = 0$. En remplaçant x par $-x$ et en additionnant :

$$(T(x) - T(-x))\sin(x) - (U(x) + U(-x))\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n})\ , \tag{24}$$

Par conséquent (comme $U(0) = 0$, le terme multipliant $\cos(x)$ est un polynôme) :

$$\frac{T(x) - T(-x)}{x}\sin(x) - \frac{U(x) + U(-x)}{x}\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n-1})\ , \tag{25}$$

Par hypothèse de récurrence il en résulte $\frac{\mathrm{T}(x)-\mathrm{T}(-x)}{x} = \lambda \mathrm{P}_{n-1}(x)$ et $\frac{\mathrm{U}(x)+\mathrm{U}(-x)}{x} = \lambda \mathrm{Q}_{n-1}(x)$. Mais par récurrence sur n :

$$\mathrm{P}_{n-1}(x)\sin(x) - \mathrm{Q}_{n-1}(x)\cos(x) \sim \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}, \tag{26}$$

donc $\lambda = 0$. Donc T est pair et U est impair.

Pour $n \geqslant 1$, on doit avoir $\mathrm{T}(0) - \mathrm{U}'(0) = 0$, on peut donc définir U_{n-1} par la relation $\mathrm{U}' - \mathrm{T} = x\mathrm{U}_{n-1}$. Par ailleurs $\mathrm{T}' + \mathrm{U}$ est impair, donc on définit T_{n-1} par $\mathrm{T}' + \mathrm{U} = x\mathrm{T}_{n-1}$. En dérivant le développement limité on obtient $\mathrm{T}_{n-1}(x)\sin(x) - \mathrm{U}_{n-1}(x)\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n-2})$. Par hypothèse de récurrence T_{n-1} et U_{n-1} sont déterminés à un multiple (commun) près donc (par le théorème 2) aussi T et U. □

Intégrale de Niven

Je vais maintenant établir un lien avec l'intégrale utilisée par Niven, dont on a lu dans l'article de Beukers qu'elle correspond au numérateur de la n^{e} réduite de la fraction continue, donc $\mathrm{P}_n(x)$, évalué au point $x = \frac{\pi}{2}$. On a l'intégrale multiple

$$\mathrm{P}_n(x)\sin(x) - \mathrm{Q}_n(x)\cos(x) = \underset{0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant x}{\int\cdots\int} u_n\cdots u_2 u_1 \sin(u_1)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n \tag{27}$$

soit aussi :

$$= \underset{0\leqslant t\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant x}{\int\cdots\int} u_n\cdots u_2 u_1 \cos(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n \tag{28}$$

$$= \int_0^x \frac{\underset{t\leqslant u_1,\ldots,u_n\leqslant x}{\int\cdots\int} u_1\cdots u_n \mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n}{n!}\cos(t)\,dt \tag{29}$$

$$= \int_0^x \frac{(x^2-t^2)^n}{2^n n!}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^x \frac{(x^2-t^2)^n}{2\cdot 2^n n!}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^{-n}}{2\cdot n!}\int_0^{2x}(2ux-u^2)^n\cos(u-x)\,\mathrm{d}u \tag{30}$$

Avec $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient que $2^n\mathrm{P}_n(\frac{\pi}{2})$ est l'intégrale de Niven :

$$2^n\mathrm{P}_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\cdot n!}\int_0^{\pi} u^n(\pi-u)^n\sin(u)\,\mathrm{d}u \tag{31}$$

Formules exactes pour P_n et Q_n

On a l'équation différentielle $(\mathrm{X}_n e^{-ix})' = x\mathrm{X}_{n-1}e^{-ix}$. Soyons audacieux et définissons

$$\mathcal{X}_n(x) = \mathrm{X}_n(-ix) = \mathrm{P}_n(-ix) + i\mathrm{Q}_n(-ix) \tag{32}$$

Ce sont des polynômes à coefficients entiers, puisque P_n et Q_n sont pair et impair et à coefficients entiers. Ils vérifient la relation

$$\mathcal{X}_n(x) - \mathcal{X}_n'(x) = x\mathcal{X}_{n-1}(x) \qquad \text{ou encore } (\mathrm{e}^{-x}\,\mathcal{X}_n(x))' = -x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathcal{X}_{n-1}(x)\ , \tag{33}$$

qui suggère immédiatement :

$$\mathcal{X}_n(x) = \mathrm{e}^x \int_x^\infty u\mathcal{X}_{n-1}(u)\,\mathrm{e}^{-u}\ du\ . \tag{34}$$

Et en effet en écrivant cela sous la forme $\mathcal{X}_n(x) = \int_0^\infty (x+v)\mathcal{X}_{n-1}(x+v)\,\mathrm{e}^{-v}\ dv$ on voit que le caractère polynomial est préservé. Ainsi, en utilisant une intégrale multiple :

$$\mathcal{X}_n(x)e^{-x} = \int\!\cdots\!\int_{+\infty > t \geqslant u_1 \geqslant \cdots \geqslant u_n \geqslant x} u_n \cdots u_2 u_1 e^{-t}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n = \int_x^\infty \frac{(t^2-x^2)^n}{2^n n!} e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{35}$$

$$\mathcal{X}_n(x) = \int_0^\infty \frac{u^n(u+2x)^n}{2^n n!} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^n 2^{k-n}\frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}x^k = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k}(2n-2k-1)!!\,x^k \tag{36}$$

On a utilisé la convention $(-1)!! = 1$. Finalement :

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]} (-1)^j \binom{2n-2j}{2j}(2n-4j-1)!!\ x^{2j} \tag{37}$$

$$\mathrm{Q}_n(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant [\frac{n-1}{2}]} (-1)^j \binom{2n-2j-1}{2j+1}(2n-4j-3)!!\ x^{2j+1} \tag{38}$$

Bien sûr ce sont là des formules nécessairement bien connues pour les numérateurs et dénominateurs du développement en fraction continue de $\mathrm{ctg}(x)$.

La relation de récurrence (liée à la fraction continue)

Les formules explicites ci-dessus montrent $P_n(0) = Q_n'(0) = (2n-1)!!$. Cela suggère de s'intéresser aux combinaisons $P_{n+1} - (2n+1)P_n$ et $Q_{n+1} - (2n+1)Q_n$ et, partant, aux polynômes $T_{n-1} = x^{-2}(P_{n+1} - (2n+1)P_n)$ et $U_{n-1} = x^{-2}(Q_{n+1} - (2n+1)Q_n)$ qui sont pair et impair. On a

$$P_{n+1}(x)\sin(x) - Q_{n+1}(x)\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n+2}) \tag{39}$$

$$P_n(x)\sin(x) - Q_n(x)\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n}) \tag{40}$$

et ainsi :

$$T_{n-1}(x)\sin(x) - U_{n-1}(x)\cos(x) = \boldsymbol{o}(x^{2n-2}) \tag{41}$$

De plus $T_{n-1} + iU_{n-1}$ a même degré et coefficient dominant que $-(P_{n-1} + iQ_{n-1})$. Comme (41) et la condition sur les degrés déterminent à un multiple commun près les polynômes réels pair et impair, on obtient les relations de récurrence à trois termes :

$$P_{n+1} = (2n+1)P_n - x^2P_{n-1} \tag{42}$$

$$Q_{n+1} = (2n+1)Q_n - x^2Q_{n-1} \tag{43}$$

On peut bien sûr vérifier la validité de ces identités sur la base de (37) et (38). Excellent exercice niveau L1-L2 (?) pour manipuler des coefficients du binôme !

Une discussion plus approfondie de cette fameuse fraction continue fera intervenir les fonctions de Bessel, et plus généralement les fonctions hypergéométriques, et d'autres fonctions spéciales encore. Le sujet n'est sûrement pas encore épuisé de nos jours.