Cesàro comme interversion de limites

Jean-François Burnol, 27 septembre 2011

Le Théorème de Cesàro est un classique : si $\lim S_n = L$ alors

$$\lim \frac{S_0 + \cdots + S_{N-1}}{N} = L$$

En fait Cesàro lui-même appliquait ce procédé (et d'autres, plus généraux) aux sommes partielles $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} c_k$ d'une série, et

$$\frac{S_0 + \cdots + S_{N-1}}{N} = \sum_{0\leqslant k\leqslant N} (1 - \frac{k}{N}) c_k$$

L'hypothèse est donc maintenant que la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ converge. Considérons plus généralement des séries pondérées :

$$F(a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k(a)$$

Pour Cesàro, le paramètre a est un entier N, les coefficients $x_k(N)$ valent $\max(1 - \frac{k}{N}, 0)$. Pour chaque k le coefficient $x_k(N)$ tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini. Peut-on donc affirmer qu'en général :

$$\forall k \quad x_k(a) \underset{a\to a_0}{\to} 1 \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{a\to a_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k(a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Bien évidemment, non : on ne sait même pas si les séries $F(a)$ convergent !

Mais si on réussit à le prouver, peut-être aurons-nous alors une **uniformité** par rapport au paramètre a qui elle permettra de conclure. Car en posant $F_N(a) = \sum_{k=0}^{N} c_k x_k(a)$, on a pour tout N, $\lim_{a\to a_0} F_N(a) = \sum_{k=0}^{N} c_k$, et le problème devient celui de la permutation des limites :

$$\lim_{a\to a_0} \lim_{N\to\infty} F_N(a) \overset{?}{=} \lim_{N\to\infty} \lim_{a\to a_0} F_N(a)$$

On sait que la convergence **uniforme** $F_N(a) \Rightarrow F(a)$ et l'existence des limites $F_N = \lim_{a\to a_0} F_N(a)$ garantissent ce résultat. Dans la pratique, il vaut mieux en général utiliser les inégalités qui nous auront servi pour établir cette convergence, plutôt que d'invoquer un théorème général (un peu fastidieux à formuler car par exemple on veut admettre $a_0 = +\infty$).

Si l'on en revient au problème de la convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k(a)$, comme la série convergente $\sum c_k$ est totalement arbitraire, le résultat général basique qui vient à l'esprit est le théorème d'Abel-Dirichlet : sous sa forme la plus simple il dit que si la suite positive $x_k(a)$ decroît alors la série converge. Plus généralement et sans hypothèse de positivité, si la série de terme général $|x_k(a) - x_{k+1}(a)|$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k(a)$ converge. La preuve consiste à faire une sommation d'Abel :

$$\sum_{k=p}^{q} c_k x_k(a) = c_p(x_p(a) - x_{p+1}(a)) + (c_p + c_{p+1})(x_{p+1}(a) - x_{p+2}(a)) + \dots$$
$$+(c_p + \cdots + c_{q-1})(x_{q-1}(a) - x_q(a)) + (c_p + \cdots + c_q)x_q(a)$$

Notez que la série $\sum(x_k(a)-x_{k+1}(a))$ est absolument convergente, donc convergente, donc la suite $x_0(a) - x_{n+1}(a)$ converge donc la suite $x_n(a)$ converge, donc elle est bornée : $|x_n(a)| \leqslant |x_0(a)| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_k(a) - x_{k+1}(a)|$. Lorsque l'on sait que $\lim x_n(a) = 0$, il est plus précis de majorer $|x_n(a)|$ par $\sum_{k=n}^{\infty} |x_k(a) - x_{k+1}(a)|$. Nous obtenons, en général :

$$\left|\sum_{k=p}^{q} c_k x_k(a)\right| \leqslant \left(\sum_{k=p}^{q-1} |x_k(a) - x_{k+1}(a)| + |x_q(a)|\right) \cdot \max_{p\leqslant k\leqslant q} |c_p + \cdots + c_k|$$
$$\leqslant T(a) \cdot \max_{p\leqslant k\leqslant q} |c_p + \cdots + c_k| \qquad T(a) = |x_0(a)| + 2\sum_{k=0}^{\infty} |x_k(a) - x_{k+1}(a)|$$

Ceci prouve que le critère de Cauchy est vérifié, puisque par hypothèse la série $\sum c_k$ est convergente. Donc effectivement les séries $\sum c_k x_k(a)$ convergent, et comme on l'espérait, il y a convergence uniforme en a dès que les $T(a)$ sont uniformément bornés :

$$\exists T < \infty \quad \forall a \qquad T(a) \leqslant T$$

En effet les séries $\sum c_k x_k(a)$ sont alors uniformément de Cauchy. Ou plus concrètement, en passant à la limite, maintenant autorisée, $q \to \infty$:

$$\left|\sum_{k=p}^{\infty} c_k x_k(a)\right| \leqslant T(a) \cdot \sup_{k\geqslant p} |c_p + \cdots + c_k| \leqslant 2T(a) \cdot \sup_{q\geqslant p} \left|\sum_{k=q}^{\infty} c_k\right|$$

Nous en arrivons à notre généralisation des moyennes de Cesàro :

Théorème. *Soit* $\sum c_k$ *une série convergente et* $x_k(a)$ *des fonctions définies dans un voisinage de* a_0 *(éventuellement* $a_0 = \infty$ *et* a *peut ne prendre alors que des valeurs entières) vérifiant :*

1. *pour tout* k, *on a* $x_k(a) \underset{a\to a_0}{\to} 1$,
2. *il existe une majoration indépendante de* a *:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k(a) - x_{k+1}(a)| \leqslant C$$

Alors :

$$\lim_{a\to a_0} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k(a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Preuve. Puisque $x_0(a) \to 1$, quitte à restreindre a on peut supposer $|x_0(a)| \leqslant 2$ et donc avec $T = 2 + 2C$, par ce qui précède :

$$\forall a \qquad \left|\sum_{k=p}^{\infty} c_k x_k(a)\right| \leqslant 2T \cdot \sup_{q\geqslant p} |\sum_{k=q}^{\infty} c_k|$$

Il en résulte :

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k(a) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |c_k|\,|x_k(a) - 1| + (2T+1) \sup_{q\geqslant p} |\sum_{k=q}^{\infty} c_k|$$

Nous prenons p suffisamment grand pour que le dernier terme soit au plus $\frac{1}{2}\varepsilon$, puis avec ce p fixé, nous prenons a suffisamment proche de a_0 de sorte que la première somme soit elle aussi au plus $\frac{1}{2}\varepsilon$. Par conséquent le théorème est démontré. □

Corollaire : *si* $(x_k(a))_{k\geqslant 0}$ *est pour chaque* a *une suite positive décroissante, et si pour chaque* k *on a* $x_k(a) \to_{a\to a_0} 1$, *alors la conclusion du théorème vaut.* En effet, comme $x_0(a)$ converge vers 1, on pourra quitte à restreindre a à un voisinage de a_0 le supposer borné par 2 et $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k(a) - x_{k+1}(a)| \leqslant x_0(a)$, ainsi $C = 2$ convient. Comme application, citons ce Théorème dit de Hardy :

Théorème. *Si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *converge alors la fonction continue* $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!}$ *vérifie :*

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A g(t)e^{-t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Preuve. La série entière de somme g(t) a un rayon de convergence infini, il y a convergence uniforme sur tout compact, donc

$$\int_0^A g(t)e^{-t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^A \frac{t^k}{k!}e^{-t}\,dt$$

Un calcul par intégrations par parties successives donne :

$$x_k(A) := \int_0^A \frac{t^k}{k!}e^{-t}\,dt = 1 - (1 + A + \cdots + \frac{A^k}{k!})e^{-A}$$

On peut aussi retrouver ceci comme application de la formule de Taylor avec reste intégral appliqué au calcul de e^A.

Quoi qu'il en soit, $0 \leqslant x_k(A) < 1$, $\lim_{A\to+\infty} x_k(A) = 1$, et, pour chaque A fixé, la suite $(x_k(A))$ est décroissante (de limite nulle). Le fait que $x_k(A)$ décroisse lorsque k augmente n'est pas tout-à-fait immédiat lorsque l'on regarde l'intégrale (car a priori on s'attend en effet à ce que cela décroisse dès que $t \leqslant k + 1$, c'est-à-dire pour $k \geqslant A - 1$, mais la formule montre que cela décroît dès $k = 0$, donc uniformément en A, ce qui est la clef ; on peut aussi s'en convaincre sans la formule, en écrivant l'intégrale soit sur $[0, A]$, soit sur $[A, +\infty[$ suivant les k.)

Bref, le théorème de Hardy résulte donc de notre version généralisée des moyennes de Cesàro. □

Terminons sur un énoncé directement du type

$$\lim S_n = L \implies \lim \frac{S_0 + \cdots + S_{N-1}}{N} = L$$

Théorème. *Supposons que des nombres réels ou complexes* $\lambda_n(a)$ *vérifient :*

1. $\forall n \quad \lim_{a\to a_0} \lambda_n(a) = 0$,
2. $\exists C < \infty \quad \forall a \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(a)| \leqslant C$.
3. $\lim_{a\to a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(a) = 1$,

Alors $\boxed{\lim S_n = L \implies \lim_{a\to a_0} \sum_{n=0}^{\infty} S_n\lambda_n(a) = L}$.

Preuve. Par (3) on peut supposer $L = 0$. Mais $\left|\sum_{n=0}^{\infty} S_n\lambda_n(a)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |S_n|\,|\lambda_n(a)| + \sup_{n>N} |S_n| \cdot C$. Avec les $\frac{1}{2}\varepsilon$ habituels, on a le résultat. □

Ce n'est en fait qu'une variante équivalente à notre théorème principal, mais la preuve en a été plus rapide à rédiger !