Le premier théorème taubérien de Hardy

Jean-François Burnol, 14 février 2013.

La que
vent. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle et

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n}\ ,$$

la suite de se $n \geqslant 1$. Le choix de commencer à zéro et terminer à $n-1$ se trouvera justifié par la suite par certaine
diviser par le nombre de terme n donc. On sait que si la suite (u_n) converge alors la suite (v_n) aussi, vers la même limite.

Réciproque ? on sait qu'elle e
tion néce $\lim(u_n - v_n) = 0$.
Et si on remplace v_n par sa valeur, ça nous donne une condition néce (u_n) uniquement :

$$\lim \frac{(u_n - u_0) + (u_n - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1})}{n} = 0\ .$$

Bon, c'e [1]

Ce
définir $x_k = u_k - u_{k-1}$, pour $k \geqslant 1$, et notre critère devient (petit exercice algébrique) :

$$\lim \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n} = 0\ ,$$

ce qui e
suite (nx_n) nous permet donc de dire :

1. Attention ! on pré-suppo $\lim v_n$ bien sûr.

Théorème : si la suite (u_n) e
convergent, et si $n(u_n - u_{n-1})$ tend vers zéro, alors la suite (u_n) converge.

Je vais démontrer le ré
dé
laboration entre Hardy et Littlewood :[2]

Théorème de Hardy : si la suite (u_n) e
de Ce et si le $n(u_n - u_{n-1})$ sont borné, alors la suite (u_n) converge.

Po $x_n = u_n - u_{n-1}$, $x_0 = 0$, on suppo $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ n|x_n| \leqslant C.}$ On a donc, par notre calcul précédent :

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + x_1 + \cdots + x_n \\ v_n &= u_n - \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n} \\ &= u_0 + (1 - \frac{1}{n})x_1 + (1 - \frac{2}{n})x_n + \cdots + \frac{1}{n}x_{n-1} \end{aligned}$$

Quitte à soustraire u_0 à tous le u_n et v_n, ce qui ne change rien aux x_n, et ne modifie pas no
la suite $u_0 = 0$. Le problème e

2. le vrai point de dé
rème de Tauber sur la réciproque au théorème d'Abel. Pour ce théorème de Tauber, voir http://jf.burnol.free.fr/agregtauberlaplace.pdf.

série $x_1+x_2+x_3+\dots$ sachant que l'on a existence de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n})x_k=\mathcal{L}$$

Faite $1-\frac{k}{n}$, qui sont sur un segment affine partant de 1 et de $1/n$. Si on prend l'ex v_{pn} et que l'on multiplie tout par p, on part de p et on de $1/n$, et ceci pour tout $p\geqslant 1$ fixé. On e

amené à considérer (vérifier la formule!!) :

$$(p+1)v_{(p+1)n}-pv_{pn}=x_1+x_2+\dots+x_{pn}+(1-\frac{1}{n})x_{pn+1}+(1-\frac{2}{n})x_{pn+2}+\dots+\frac{1}{n}x_{pn+n-1}$$

On obtient la majoration :

$$\begin{aligned}\left|(p+1)v_{(p+1)n}-pv_{pn}-u_{pn}\right| &\leqslant \mathcal{C}\left(\frac{1}{pn+1}+\dots+\frac{1}{pn+n-1}\right)\\ &\leqslant \mathcal{C}\int_{pn}^{pn+n}\frac{dt}{t}=\mathcal{C}\log(1+\frac{1}{p})\leqslant\frac{\mathcal{C}}{p}\end{aligned}$$

Je n'ai guère été o [3]

Il y a un problème : nous n'avons obtenu un ré

la suite (u_n) que pour que le p. Soit $n\geqslant p$ et $m=\left[\frac{n}{p}\right]\geqslant 1$, donc $mp\leqslant n<mp+p$. Alors

$$\begin{aligned}|u_n-u_{pm}| &\leqslant \mathcal{C}\left(\frac{1}{pm+1}+\frac{1}{pm+2}+\dots+\frac{1}{pm+p-1}\right)\\ &\leqslant \mathcal{C}\int_{pm}^{pm+p}\frac{dt}{t}\leqslant\mathcal{C}\log(1+\frac{1}{m})\leqslant\frac{\mathcal{C}}{m}\end{aligned}$$

3. au lieu de passer par l'intégrale, on peut dire qu'il y a $n-1$ terme inférieurs à $\mathcal{C}/pn$ et basta. Et idem dans la majoration au bas de cette page : $p-1$ terme $\mathcal{C}/pm$.

En combinant, on a donc l'inégalité de Hardy, pour $n \geqslant p \geqslant 1$:

$$\left|(p+1)v_{(p+1)[\frac{n}{p}]} - pv_{p[\frac{n}{p}]} - u_n\right| \leqslant \mathcal{C} \cdot (\frac{1}{p} + \frac{1}{[n/p]})$$

Pour chaque $p \geqslant 1$ fixé on a

$$\lim_{n\to\infty} (p+1)v_{(p+1)[\frac{n}{p}]} - pv_{p[\frac{n}{p}]} = (p+1-p)\lim v_n = \mathcal{L} \,,$$

puisque cette dernière limite $\mathcal{L}$ existe par hy

Soit $\epsilon > 0$ et p tel que $\frac{\mathcal{C}}{p} \leqslant \frac{1}{4}\epsilon$. Il existe $\mathcal{N} = \mathcal{N}(p, \epsilon)$ tel que :

$$n \geqslant \mathcal{N} \implies (\frac{\mathcal{C}}{[n/p]} \leqslant \frac{1}{4}\epsilon) \,\&\, (\left|(p+1)v_{(p+1)[\frac{n}{p}]} - pv_{p[\frac{n}{p}]} - \mathcal{L}\right| \leqslant \frac{1}{2}\epsilon)$$

Et par conséquent

$$n \geqslant \mathcal{N} \implies |u_n - \mathcal{L}| \leqslant \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \,,$$

ce qui achève la démonstration du Théorème de Hardy.