

# Gramiens et Inégalités

Jean-François Burnol, 26 mars 2011

## 1 Algèbre ou Analyse ?

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  une matrice symétrique. En notant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{R}^n$ , et  $\varphi$  l'endomorphisme de matrice  $M$  dans la base canonique, la forme quadratique associée à  $M$  est  $q_M(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle$ , ou plus commodément  $q_M(x) = \langle x, Mx \rangle$ , puisque nous voyons toujours  $\mathbf{R}^n$  comme un espace de colonnes. D'ailleurs, la notation matricielle est souvent bien pratique :

$$q_M(x) = {}^t x M x ,$$

car on y fait l'économie des crochets  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . C'est par précaution que j'ai utilisé les crochets plutôt que les parenthèses  $(\cdot, \cdot)$  : pour me réserver de la souplesse si je devais utiliser d'autres formes bilinéaires et ne pas être obligé pour les distinguer de devoir y ajouter des indices.

La forme bilinéaire  $(\cdot, \cdot)$  associée à  $M$  est  $(x, y) = \langle x, \varphi(y) \rangle = {}^t x M y$ . Elle est symétrique. On dit que la matrice  $M$  est positive lorsque la forme quadratique  $q_M$  sur  $\mathbf{R}^n$  est positive. On a vu précédemment :

$0 \leq \det M \leq m_{11} \cdots m_{nn}$ pour une matrice positive.	<b>[A]</b>
--	------------

J'ai traité dans [1] de cette question, j'y renvoie pour l'échauffement.<sup>1</sup> Dans la présente fiche je veux me concentrer plus sur l'*inégalité d'Isabelle-Hervé* :

$M = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^t C & B \end{pmatrix} \geq 0 \implies \det M \leq \det A \det B$	<b>[B]</b>
---	------------

On y a utilisé un cas particulier de la notation  $N \geq M$  qui signifiera que la matrice symétrique  $N - M$  est positive. Lorsque  $M$  est définie positive,  $\det M$  est le *gramien*  $g(\mathbf{e})$  des vecteurs de la base canonique  $\mathbf{e}$  de  $\mathbf{R}^n$ , pour le produit scalaire  $q_M$ .<sup>2</sup>

---

1. Il y a aussi [2] si vous voulez revoir la caractérisation déterminantale des matrices symétriques positives.

2. Je n'ai défini de gramien que pour des vecteurs d'un espace euclidien, uniquement parce que je n'avais pas de mot pour désigner un espace muni d'une forme quadratique positive mais pas nécessairement définie positive. « Pré-euclidien » peut-être ?

Le déterminant est entièrement déterminé par la forme quadratique  $q_M$ ,<sup>3</sup> donc les deux sont reliés purement algébriquement.<sup>4</sup> Mais, comme HERVÉ me l'a montré à l'occasion d'une démonstration en quelques lignes de **[B]** (vous la fournira-t-il gratuitement ? [3]) l'Analyse n'est pas peu fière de disposer d'une formule magique :

$$\frac{1}{\sqrt{\det M}} = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\pi \langle x, Mx \rangle} dx$$

Cette formule marche pour  $M$  strictement positive et même lorsque seulement  $M \geq 0$  en y convenant que  $\frac{1}{0} = +\infty$ . Par contre, attention, son sens devient beaucoup beaucoup moins évident lorsque  $M$  est seulement supposée symétrique mais pas positive ! Disons simplement qu'elle perd tout sens évident dans ce cas (le terme de gauche aura fortement envie d'être un nombre complexe si  $\det M < 0$ , tandis que le terme de droite semble ne pas vouloir sortir de  $[0, +\infty]$ ).

**Lemme 1.** Si  $0 \leq M \leq N$  alors  $\det M \leq \det N$ .

*Preuve.* La « formule magique » rend le résultat évident :  $\langle x, Nx \rangle - \langle x, Mx \rangle = \langle x, (N - M)x \rangle$  est par hypothèse toujours positif ou nul. Donc la fonction intégrée avec  $N$  est plus petite que celle avec  $M$ . Donc  $\det N$  est plus grand que  $\det M$ .  $\square$

*Preuve par l'algèbre.* On peut supposer  $M$  définie positive. On note  $E$  l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  muni de  $q_M$ . La matrice  $M$  est alors la matrice de Gram de la base canonique. On applique à la base canonique  $\mathbf{e}$  l'orthonormalisation de Gram-Schmidt ce qui nous donne une base orthonormée  $\mathbf{f}$ . On note  $P$  la matrice qui exprime  $\mathbf{e}$  dans  $\mathbf{f}$  et on sait que les matrices de Gram sont reliées par  $M = G(\mathbf{e}) = {}^t P G(\mathbf{f}) P = {}^t P P$ .

Bon, on pouvait aussi faire appel au théorème de diagonalisabilité des matrices symétriques dans des bases orthonormées (pour le produit scalaire canonique), théorème qui nous permet de trouver  $R$  avec  ${}^t R = R$  et

---

3. Attention ! c'est parce qu'on a **aussi** le produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur notre  $\mathbf{R}^n$ . Car on ne peut **pas** associer un déterminant à une forme quadratique si on ne dispose pas d'une autre (définie positive) à qui la comparer. Les déterminants sont associés aux endomorphismes ; une forme bilinéaire ne peut être vue comme un endomorphisme **que** si l'on dispose **déjà** d'une identification entre l'espace  $E$  et son dual  $E^*$ .

4. La prééminence de l'algèbre linéaire « moderne » a relégué, en ce qui concerne les programmes de l'enseignement, du collège au master, dans le quasi-oubli les puissants outils de Jacobi, Cauchy, Sylvester, etc. . . , et ce lien algébrique est moins facilement exploitable pour l'enseignant moderne.

$M = R^2$ . Mais le résultat plus facile  $M = {}^t P P$  sans imposer  ${}^t P = P$  nous suffira.

En effet,  $P$  est inversible, et, en notant  $Q = P^{-1}$  :

$$N = M + N - M = {}^t P (I + {}^t Q (N - M) Q) P$$

$$\det N = \det M \det(I + S) \quad \text{avec } S = {}^t Q (N - M) Q \geq 0$$

On peut alors procéder de plusieurs manières :

- par exemple comme  $S \geq 0$  ses valeurs propres réelles sont positives ( $q_S(x) = \langle x, Sx \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$  pour  $x$  vecteur propre), donc  $\det(I + S) \geq 1$  ; et d'ailleurs on sait aussi qu'il n'y a pas de valeurs propres non réelles,
- ou encore on justifie par multilinéarité du déterminant la formule

$$\det(I + S) = 1 + \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}} S_{i_1, \dots, i_p}$$

avec  $S_{i_1, \dots, i_p}$  un mineur diagonal d'ordre  $p$ , donc quelque chose de positif car déterminant d'une matrice positive. cf. [2]

Quoi qu'il en soit la conclusion est  $\det(I + S) \geq 1$ , et le Lemme est prouvé.  $\square$

## 2 Une approche à l'inégalité d'Isabelle-Hervé

Il s'agit donc de montrer  $\det M \leq \det A \det B$  lorsque  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^t C & B \end{pmatrix}$  est positive. On peut la supposer définie positive car de toute façon  $\det A \geq 0$ ,  $\det B \geq 0$  ces deux matrices étant positives (sous-exercice : ce sont les matrices de la restriction de  $q_M$  aux sous-espaces vectoriels engendrés par  $e_1, \dots, e_p$  d'un côté et  $e_{p+1}, \dots, e_n$  de l'autre ;  $A$  de taille  $p \times p$ .)

Soit  $I_p$  et  $I_{n-p}$  des matrices identités et :

$$R = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix} \quad N = {}^t R M R = \begin{pmatrix} A & -C \\ -{}^t C & B \end{pmatrix}$$

Par construction  $N$  est aussi une matrice symétrique positive et même strictement positive. Écrivons :

$$M = {}^t P P$$

$$N = {}^t P W P$$

On va voir comment trouver  $P$  avec  $M = {}^t P P$  et la matrice  $W$  est juste définie par  $W = {}^t Q N Q$ ,  $Q = P^{-1}$ . Notez que :

1. P est inversible et  $\det(P)^2 = \det M$

2. W est positive.

Enfin, je prends note que  $(\det M)^2 = \det M \det N = (\det P)^4 \det W$ .

Calculons la somme  $M + N$  : c'est

$$M + N = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix} \implies \det(M + N) = 2^n \det A \det B$$

Mais  $\det(M + N) = \det P \det(I + W) \det P$ . On utilise (en suivant le maître Hervé !) l'inégalité arithmético-géométrique dans un cas extrêmement subtil :

$$w \geq 0 \implies 1 + w \geq 2 \sqrt{w}$$

donc, puisque W est diagonalisable avec des valeurs propres réelles et positives :

$$\det(I + W) \geq 2^n \sqrt{\det W}$$

Au final

$$2^n \det A \det B = \det(M + N) \geq 2^n (\det P)^2 \sqrt{\det W} = 2^n \det M$$

ce qui est le résultat voulu !

### 3 Une approche par les grammiens

**Théorème 1.** Soit E un espace euclidien, et  $\pi$  un opérateur de projection orthogonale. Alors pour tout système  $\mathbf{x}$  de vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  de E on a

$$g(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)) \leq g(x_1, \dots, x_n). \quad [\text{C}]$$

*Preuve.* Écrivons  $\pi(x_j) = y_j$ ,  $x_j = y_j + z_j$ . Les produits scalaires valent, par perpendicularité (forme bilinéaire du théorème de Pythagore...) :

$$(x_i, x_j) = (y_i, y_j) + (z_i, z_j)$$

Donc, tout simplement  $G(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}) + G(\mathbf{z})$ . Ce sont trois matrices positives, l'inégalité résulte alors de notre Lemme 1.  $\square$

**Théorème 2.** Soit E un espace euclidien et  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs. Soit  $1 \leq p < n$ . Alors :

$$\boxed{g(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_p) g(x_{p+1}, \dots, x_n)} \quad [\text{D}]$$

Plus généralement en notant  $g(I)$  le gramien formé avec les vecteurs d'indices  $i$  dans  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\boxed{g(x_1, \dots, x_n) \leq g(I_1) \cdots g(I_m)} \quad \text{[E]}$$

pour toute partition  $\{1, \dots, n\} = I_1 \cup \dots \cup I_m$ .

*Preuve du Théorème.* On a utilisé tacitement dans la deuxième partie de cet énoncé que le gramien était invariant par permutation de ses entrées. Cette deuxième partie résulte de la première par récurrence sur l'entier  $m$  donnant le nombre de parties de la partition. En prenant la partition maximale, on retrouve le résultat

$$g(\mathbf{x}) \leq \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2$$

établi aussi dans [1], et qui équivaut à notre équation **[A]** (et à l'inégalité de HADAMARD).

Il reste à montrer l'inégalité **[D]**. Si le système  $\mathbf{x}$  est linéairement dépendant, le gramien est nul. Donc on supposera les vecteurs  $\mathbf{x}$  indépendants. Notons  $\pi$  la projection orthogonale sur l'espace perpendiculaire à celui engendré par  $x_1, \dots, x_p$ . On aura commencé par remplacer  $E$  par l'espace de dimension  $n$  engendré par  $\mathbf{x}$  pour éviter les problèmes de dimension infinie. On peut donc écrire, pour chaque  $j \geq p + 1$  :  $x_j = \pi(x_j) + \sum_{1 \leq i \leq p} a_{ij} x_i$  pour certains coefficients  $a_{ij}$ .<sup>5</sup> Donc en posant

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_p, \pi(x_{p+1}), \dots, \pi(x_n)) ,$$

on constate que la matrice exprimant  $\mathbf{y}$  dans  $\mathbf{x}$  est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. La gramien de  $\mathbf{y}$  est donc aussi celui de  $\mathbf{x}$ . Or la matrice  $G(\mathbf{y})$  a deux blocs diagonaux, le reste étant nul par perpendicularité. Ainsi, à ce stade :

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, \dots, x_p) g(\pi(x_{p+1}), \dots, \pi(x_n)) ,$$

et il ne reste plus qu'à évoquer le Théorème 1. □

T.S.V.P.

---

5.  $\sum_{1 \leq i \leq p} a_{ij} x_i$  est la projection orthogonale de  $x_j$  sur l'espace engendré par  $x_1, \dots, x_p$  ; ceux-ci sont linéairement indépendants et les  $a_{ij}$  existent et sont uniques.

## 4 Forme matricielle : l'inégalité générale d'Isabelle-Hervé

La traduction sous forme matricielle de notre Théorème 2 donne en particulier le résultat suivant :

$$M = \begin{pmatrix} A & * & \dots & * & * \\ * & B & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \ddots & \ddots & Y & * \\ * & * & \dots & * & Z \end{pmatrix} \geq 0 \implies \det M \leq \det A \dots \det Z \quad \text{[F]}$$

Cet énoncé englobe à la fois celui d'Isabelle-Hervé et celui qui dit que  $\det M$  est majoré par le produit de ses éléments diagonaux.

## Références

- [1] <http://jf.burnol.free.fr/agreggramhadamard.pdf>
- [2] <http://jf.burnol.free.fr/agregformesquadratiques.pdf>
- [3] Hervé QUEFFÉLEC, manuscrit, 25 mars 2011.