Sur le calcul de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ avec des intégrales doubles

Jean-François Burnol, décembre 2009

L'une des preuves les plus populaires de

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

consiste à exprimer le carré de $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ comme une intégrale double et à passer en coordonnées polaires. Il n'est pas simple, au niveau de la première ou de la seconde année, de justifier entièrement ce qui est nécessaire, surtout en ce qui concerne le changement de coordonnées. En effet il faut avoir à sa disposition une notion, suffisamment développée, d'intégrale double. Si c'est le cas, on peut aussi écrire :

$$I^2 = \iint_{0<x,y<\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{0<x,t<\infty} e^{-x^2-x^2t^2} x\,dxdt = \int_{0<t<\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}$$

Je rappelle en passant le calcul classique suivant relatif aux intégrales eulériennes :

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \iint_{0<x,y<\infty} e^{-x-y} x^{a-1} y^{b-1}\,dxdy \\
&= \iint_{0<x,t<\infty} e^{-x(1+t)} x^{a+b-1} t^{b-1}\,dxdt \\
&= \Gamma(a+b) \int_{0<t<\infty} \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt \\
&= \Gamma(a+b) \int_{0<t<\infty} \frac{1}{(1+t)^{a-1}} \frac{t^{b-1}}{(1+t)^{b-1}} \frac{dt}{(1+t)^2} = \Gamma(a+b) \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du
\end{aligned}$$

Dans cette fiche, j'explique comment calculer I lorsque l'on ne dispose que de formes faibles du théorème de Fubini, à savoir, soit Fubini pour les rectangles et les intégrandes continus :

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)\,dy \tag{1}$$

soit Fubini pour les triangles (et les intégrandes continus). Pour faire bonne mesure je démontrerai ces cas spéciaux du théorème de Fubini dans des annexes.

1 Première méthode

Notons $I(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,dx$. Soit $0 \le a < b$ et $\lambda > 0$. On écrit

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-x^2}(\int_0^{\lambda a} e^{-y^2}\,dy)\,dx &\le \int_a^b e^{-x^2}(\int_0^{\lambda x} e^{-y^2}\,dy)\,dx \\
&= \int_a^b e^{-x^2}(\int_0^{\lambda} e^{-t^2x^2} x\,dt)\,dx = \int_0^\lambda \frac{e^{-(1+t^2)a^2} - e^{-(1+t^2)b^2}}{2(1+t^2)}\,dt \\
&\le \int_0^\lambda \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt \le \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

On fait tendre b vers l'infini, ce qui donne :

$$(I - I(a))I(\lambda a) \le \frac{\pi}{4}$$

On pose $a = \lambda^{-1/2}$ et on fait tendre λ vers l'infini, donc $I^2 \le \frac{\pi}{4}$. De même :

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{-x^2}(\int_0^{\lambda b} e^{-y^2}\,dy)\,dx &\ge \int_0^b e^{-x^2}(\int_0^{\lambda x} e^{-y^2}\,dy)\,dx \\
&= \int_0^b e^{-x^2}(\int_0^{\lambda} e^{-t^2x^2} x\,dt)\,dx = \int_0^\lambda \frac{1 - e^{-(1+t^2)b^2}}{2(1+t^2)}\,dt \\
&\ge (1 - e^{-b^2})\int_0^\lambda \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I(b)I(\lambda b) \ge (1 - e^{-b^2})\int_0^\lambda \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt$$

On fait tendre b vers l'infini, puis ensuite λ vers l'infini et on obtient $I^2 \ge \frac{\pi}{4}$.

2 Deuxième méthode

Si l'on dispose de l'interversion des intégrations pour une fonction continue sur un triangle, alors on peut procéder la façon suivante :

Posons, pour $0 \le x \le a$:

$$\phi_a(x) = e^{-x^2}\int_0^{ax} e^{-y^2}\,dy = \int_0^a x e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$

$$\psi_a(x) = e^{-x^2}\int_{ax}^{a^2} e^{-y^2}\,dy \qquad \phi_a(x) + \psi_a(x) = e^{-x^2}\int_0^{a^2} e^{-y^2}\,dy$$

$$\int_0^a \phi_a(x)\,dx = \int_0^a(\int_0^a x e^{-x^2(1+t^2)}\,dt)\,dx = \int_0^a(\int_0^a x e^{-x^2(1+t^2)}\,dx)\,dt = \int_0^a \frac{1 - e^{-a^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\,dt$$

$$(1 - e^{-a^2})\int_0^a \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt \le \int_0^a \phi_a(x)\,dx \le \int_0^a \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a \phi_a(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^a \psi_a(x)\,dx = \int_0^a (\int_{ax}^{a^2} e^{-x^2-y^2}\,dy)dx = \int_0^{a^2} (\int_0^{a^{-1}y} e^{-x^2-y^2}\,dx)dy \leq \int_0^{a^2} \frac{y}{a} e^{-y^2}\,dy \leq \frac{1}{2a}$$

Donc :

$$I^2 = \lim_{a\to\infty} I(a)I(a^2) = \lim_{a\to\infty} (\int_0^a \phi_a(x)\,dx + \int_0^a \psi_a(x)\,dx) = \frac{\pi}{4}$$

3 Troisième méthode

La première méthode était un peu tarabiscotée. La seconde est plus élégante, on peut la faire fonctionner en utilisant seulement Fubini pour les rectangles 1. Soit, pour $0 \leq x \leq a$:

$$\phi_a(x) = e^{-x^2} \int_0^{ax} e^{-y^2}\,dy = \int_0^a x e^{-x^2(1+t^2)}\,dt$$
$$\psi_a(x) = e^{-x^2} \int_{ax}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

Il existe certainement un C avec

$$\forall y \geq 0 \quad e^{-y^2} \leq C e^{-y}$$

On trouve immédiatement que $C = e^{\max(y-y^2)} = e^{1/4}$ convient. Donc :

$$\psi_a(x) \leq e^{-x^2} \int_{ax}^{\infty} C e^{-y}\,dy \leq C e^{-ax}$$

Ce qui donne :

$$\int_0^a \psi_a(x)\,dx \leq \frac{C}{a} \quad \text{puis} \quad \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \psi_a(x)\,dx = 0$$

Et comme nous l'avions déjà vu, par 1 :

$$\int_0^a \phi_a(x)\,dx = \int_0^a (\int_0^a x e^{-x^2(1+t^2)}\,dt)\,dx = \int_0^a \frac{1 - e^{-a^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\,dt$$

$$(1 - e^{-a^2}) \int_0^a \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt \leq \int_0^a \phi_a(x)\,dx \leq \int_0^a \frac{1}{2(1+t^2)}\,dt \Longrightarrow \lim_{a\to\infty} \int_0^a \phi_a(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

On conclut :

$$I^2 = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x^2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \lim_{a\to\infty} (\int_0^a \phi_a(x)\,dx + \int_0^a \psi_a(x)\,dx) = \frac{\pi}{4}$$

4 Annexe : Fubini pour un rectangle

Pour être complet je prouve Fubini pour les rectangles et les intégrandes continus :

$$(2) \qquad (\Phi(t) =) \quad \int_a^t (\int_c^d f(x,y)\,dy)\,dx = \int_c^d (\int_a^t f(x,y)\,dx)\,dy \quad (= \Psi(t))$$

Ici, f est une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$, $a \leq t \leq b$ et j'ai remplacé b par t car on va prouver l'identité en montrant que Φ et Ψ sont dérivables avec la même dérivée. Et bien sûr, pour $t = a$, on a $\Phi(a) = 0 = \Psi(a)$. Soit

$$\omega(h) = \sup\{|f(x,y) - f(x',y')|,\ |x - x'| + |y - y'| \leq |h|\}$$

On a :

$$\Phi(t+h) - \Phi(t) - h\int_c^d f(t,y)\,dy = \int_t^{t+h} (\int_c^d (f(x,y) - f(t,y))\,dy)\,dx$$

$$\Longrightarrow \left|\Phi(t+h) - \Phi(t) - h\int_c^d f(t,y)\,dy\right| \leq \left|\int_t^{t+h} (\int_c^d \omega(h)\,dy)\,dx\right| = (d-c)|h|\omega(h)$$

Donc $\Phi'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy$ (bien sûr, dérivée à droite en a et à gauche en b).

Par ailleurs :

$$\Psi(t+h) - \Psi(t) - h\int_c^d f(t,y)\,dy = \int_c^d (\int_t^{t+h} (f(x,y) - f(t,y))\,dx)\,dy$$

$$\Longrightarrow \left|\Psi(t+h) - \Psi(t) - h\int_c^d f(t,y)\,dy\right| \leq \int_c^d \left|\int_t^{t+h} \omega(h)\,dx\right|\,dy = (d-c)|h|\omega(h)$$

Ainsi $\Psi'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy$.

5 Annexe : Fubini pour un triangle

Pour être complet je prouve aussi l'interversion des intégrations pour les triangles. Soit $a, b > 0$, et $\lambda = b/a$. Alors pour toute fonction continue de (x,y), $0 \leq y \leq \lambda x \leq b$, on veut montrer :

$$\int_0^a (\int_0^{\lambda x} f(x,y)\,dy)\,dx = \int_0^b (\int_{\lambda^{-1}y}^a f(x,y)\,dx)\,dy$$

Notons

$$\omega(N) = \sup_{|x-x'|+|y-y'| \leq \frac{a+b}{N}} |f(x,y) - f(x',y')|$$

Et posons aussi $C = \sup|f|$. Pour chaque $N \geq 1$, entier, on va comparer les deux intégrales itérées à la somme de Riemann :

$$S_N = \sum_{0 \leq l < k \leq N} f(\frac{k}{N}a, \frac{l}{N}b)\frac{ab}{N^2}$$

Pour $\frac{k-1}{N}a < x \leq \frac{k}{N}a$, on a :

$$\left|\int_0^{\lambda x} f(x,y)\,dy - \int_0^{\frac{k}{N}b} f(\frac{k}{N}a, y)\,dy\right| \leq \frac{b}{N}C + \omega(N)\frac{k}{N}b \leq (\frac{C}{N} + \omega(N))\,b$$

$$\left|\int_0^{\frac{k}{N}b} f(\frac{k}{N}a, y)\,dy - \sum_{l\colon 0\leq l<k} f(\frac{k}{N}a, \frac{l}{N}b)\frac{b}{N}\right| \leq \omega(N)\frac{k}{N}b \leq \omega(N)\,b$$

Donc en combinant et en intégrant :

$$\left|\int_{\frac{k-1}{N}a}^{\frac{k}{N}a} \left(\int_0^{\lambda x} f(x,y)\,dy\right)\,dx - \sum_{l\colon 0\leq l<k} f(\frac{k}{N}a, \frac{l}{N}b)\frac{b}{N}\frac{a}{N}\right| \leq (\frac{C}{N} + 2\omega(N))\frac{ab}{N}$$

Et en sommant pour $k = 1, \ldots, N$, on obtient :

$$\left|\int_0^a (\int_0^{\lambda x} f(x,y)\,dy)\,dx - S_N\right| \leq (\frac{C}{N} + 2\omega(N))ab$$

D'une manière semblable, pour $\frac{l}{N}b \leq y < \frac{l+1}{N}b$, on a

$$\left|\int_{\lambda^{-1}y}^a f(x,y)\,dx - \int_{\frac{l}{N}a}^a f(x, \frac{l}{N}b)\,dx\right| \leq \frac{a}{N}C + \omega(N)a \leq (\frac{C}{N} + \omega(N))\,a$$

$$\left|\int_{\frac{l}{N}a}^a f(x, \frac{l}{N}b)\,dy - \sum_{k\colon l<k\leq N} f(\frac{k}{N}a, \frac{l}{N}b)\frac{a}{N}\right| \leq \omega(N)a$$

$$\left|\int_{\frac{l}{N}b}^{\frac{l}{N}b+\frac{b}{N}} (\int_{\lambda^{-1}y}^a f(x,y)\,dy)\,dx - \sum_{k\colon l<k\leq N} f(\frac{k}{N}a, \frac{l}{N}b)\frac{a}{N}\frac{b}{N}\right| \leq (\frac{C}{N} + 2\omega(N))\frac{ab}{N}$$

Et en sommant pour $l = 0, \ldots, N-1$, on obtient :

$$\left|\int_0^b (\int_{\lambda^{-1}y}^a f(x,y)\,dy)\,dx - S_N\right| \leq (\frac{C}{N} + 2\omega(N))ab$$

Finalement l'écart entre les deux intégrales itérées est majoré en valeur absolue par $2(\frac{C}{N} + 2\omega(N))ab$ qui tend vers zéro pour $N \to \infty$. D'où le théorème.

Le cas du triangle au-dessus de la diagonale :

$$\int_0^a (\int_{\lambda x}^b f(x,y)\,dy)\,dx = \int_0^b (\int_0^{\lambda^{-1}y} f(x,y)\,dx)\,dy$$

se traite pareillement, ou s'obtient par symétrie.

On peut aussi déduire le cas de nos triangles de celui des rectangles en interpolant au-dessus de la diagonale de manière continue entre f et zéro, sur une hauteur ϵ que l'on fait tendre ensuite vers zéro.