Note sur la réduction simultanée de formes quadratiques

Jean-François Burnol, 14 novembre 2010

Sur $\mathbf{R}^n$, nous nous sommes demandés si le théorème des bases simultanément orthogonales pour deux formes quadratiques ϕ_1 et ϕ_2, avec ϕ_1 définie positive, valait aussi en supposant seulement ϕ_1 non dégénérée. Le premier exemple possible est de prendre $n = 2$ et pour ϕ_1 la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Note : lorsque j'ai commencé à rédiger cette note j'avais pris $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et les calculs étaient plus simples, mais ensuite je me suis rappelé que nous avions, nous, $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, alors je maintiens ce choix.

J'ai ensuite proposé de prendre pour ϕ_2 une certaine forme quadratique, je ne me rappelle plus exactement laquelle, je prends ici au hasard celle dont la matrice est :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

On notera que $\det M_2 = 5 > 0$, et que son élément $(1, 1)$ est > 0, donc M_2 est définie positive.

Les témoignages divergent sur ce qui s'est passé ensuite, et l'absence de majordome muni d'un dictaphone dissimulé nous permet de laisser l'affaire bien à l'abri du voile pudique de l'oubli éternel.

Car comme ϕ_2 est définie positive, le théorème de réduction simultanée nous garantit que l'on peut bien trouver une base simultanément orthogonale ! (c'est hyper astucieux on fait l'échange révolutionnaire des indices $1 \leftrightarrow 2$).

Bon, peut-être pourrions-nous nous en convaincre par le calcul ? Soit $x = (x_1, x_2)$ un vecteur non nul (que nous voyons plutôt comme une colonne), alors les vecteurs $y = (y_1, y_2)$ qui lui sont orthogonaux pour ϕ_1 et ϕ_2 doivent vérifier :

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad -x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ 0 &= (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2 \quad 2x_1 + 9x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour que cela soit possible avec un y non nul il est nécessaire et suffisant que la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 9x_2 \end{pmatrix}$$

ne soit PAS inversible. Et donc il faut et il suffit que $2x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_1x_2 = 0$. Remarquons, c'est amusant, que si l'on prend alors y vérifiant les contraintes imposées par x on aura aussi $2y_1^2 + 2y_2^2 + 10y_1y_2 = 0$. En effet on peut échanger leurs rôles... (ça nous rappelle quelque chose ?).

Bref, ici on peut prendre $x = (1, \frac{-5+\sqrt{21}}{2})$ et $y = (1, \frac{-5-\sqrt{21}}{2})$. La matrice de passage vers la base (x, y) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \qquad \det P = -\sqrt{21}$$

On calcule pour confirmer :

$$P^t M_1 P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \\ 1 & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \\ 1 & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{-5+\sqrt{21}}{2} & -\frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-21+5\sqrt{21}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-21-5\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^t M_2 P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \\ 1 & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-5+\sqrt{21}}{2} & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \\ 1 & \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4+\sqrt{21} & -4-\sqrt{21} \\ \frac{-41+9\sqrt{21}}{2} & \frac{-41-9\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{189-41\sqrt{21}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{189+41\sqrt{21}}{2} \end{pmatrix}$$

Maintenons notre M_1 et prenons un $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} p & r \\ r & q \end{smallmatrix}\right)$ quelconque. La condition sur $x = (x_1, x_2)$ est :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ px_1 + rx_2 & rx_1 + qx_2 \end{pmatrix} = rx_1^2 + (p+q)x_1x_2 + rx_2^2 = 0$$

Encore une fois, si x non nul vérifie cette équation, alors, les y qui lui sont orthogonaux à la fois pour ϕ_1 et ϕ_2 la vérifient aussi. L'équation définit un cône qui peut être $\{0\}$, une droite double, deux droites, ou tout l'espace (si $r = 0$ et $p + q = 0$). Le cas $r = p + q = 0$ correspond à $\phi_2 = \lambda\phi_1$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ceci exclu, les trois cas possibles sont alors donnés par le signe de $\Delta = (p+q)^2 - 4r^2$: si $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$ l'équation a comme solution $\{0\}$ ou une droite (double), et on ne peut donc pas y prendre deux vecteurs x et y indépendants. Si $\Delta > 0$, et que $x = (x_1, x_2)$ non nul vérifie la condition, il faut aussi s'assurer que la droite des $y = (y_1, y_2)$ qui lui sont compatibles n'est pas $\lambda(x_1, x_2)$: ceci ne pourrait se produire que si x était un vecteur nul pour ϕ_1 donc $x = (1, \epsilon)$ à un multiple près avec $\epsilon = \pm 1$. Cela correspond à $2r + \epsilon(p+q) = 0$, ou encore $r^2 = \frac{1}{4}(p+q)^2$, et est exclu par la condition $\Delta > 0$. Ainsi lorsque ϕ_2 n'est pas un multiple de ϕ_1 la réduction simultanée est possible si et seulement si $\Delta > 0$, ou encore $|r| < \frac{|p+q|}{2}$.

Lorsque $\det M_2 > 0$ (dans ce cas soit ϕ_2, soit $-\phi_2$ est définie positive), de la formule $\Delta = (p-q)^2 + 4(pq - r^2)$ on voit $\Delta > 0$, et la réduction simultanée est bien toujours possible.

Lorsque $\det M_2 = 0$, la réduction simultanée est possible si et seulement si $p \neq q$ ou $M_2 = 0$.

Finalement lorsque ϕ_2 est de signature $(1, 1)$, c'est-à-dire lorsque $pq < r^2$, la réduction simultanée est possible si et seulement si soit $r = 0$, $p + q = 0$, soit $r^2 < \frac{1}{4}(p+q)^2$. On aura pour $p + q \neq 0$ un r possible si et seulement si $\frac{1}{4}(p+q)^2 > pq$, c'est-à-dire $p - q \neq 0$.

Par exemple pour la matrice $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 10 \end{smallmatrix}\right)$ de signature $(1, 1)$, la réduction simultanée avec M_1 est possible, mais elle ne l'est pas pour $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 10 \end{smallmatrix}\right)$. Elle l'est pour $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 10 \end{smallmatrix}\right)$ mais cette dernière est définie positive.