Fibonacci

ou comment se faufiler à travers les marteaux-pilons

Jean-François Burnol, 26 mars 2011

Cher Hervé,

je reprends au bond ton approche aux propriétés de divisibilité des nombres de Fibonacci. Évidemment un minimum de théorie des corps de nombres algébriques et de théorie de Galois rendrait tout cela assez transparent mais je vais tenter une approche un peu sur le côté. Tu as défini :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Il est utile d'introduire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet α et β en sont les valeurs propres, $\alpha+\beta = 1 = \operatorname{Tr} A$ et $\alpha\beta = -1 = \det A$. Le THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON affirme que

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I = A^2 - A - I = 0\ ,$$

et ce marteau-pilon-écrase-mouche sera rapidement confirmé par le calculateur intrépide. Autrement dit

$$A^2 = A + I, \text{donc :} \quad A^{n+2} = A^{n+1} + A^n$$

ce qui ressemble assez furieusement à la récurrence de Fibonacci, surtout si on passe aux traces :

$$\operatorname{Tr} A^{n+2} = \operatorname{Tr} A^{n+1} + \operatorname{Tr} A^n$$

Donc la suite ($t_n = \operatorname{Tr} A^n$) vérifie la même récurrence que la suite de Fibonacci. Calculons les premières valeurs :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, A^6 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}, \dots$$

C'est assez clair ! on a, et la preuve par récurrence est immédiate, attention seulement aux indices :[1]

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{donc } t_n = F_{n-1} + F_{n+1} = \alpha^n + \beta^n$$

On voit ainsi que les quantités symétriques $\alpha^n + \beta^n$ sont des nombres entiers, ce qui suffit pour ton texte.

En effet tu y considérais, avec un certain $d \geq 0$:

$$\sum_{0\leq j\leq p} (\alpha^d)^j(\beta^d)^{p-j}$$

Supposons $j < \frac{1}{2}p$, alors on combine le terme avec j et celui avec $p - j$ ce qui donne

$$\alpha^{dj}\beta^{d(p-j)} + \alpha^{d(p-j)}\beta^{dj} = \alpha^{dj}\beta^{dj}\left((\beta^d)^{p-2j} + (\alpha^d)^{p-2j}\right) = \pm t_{d(p-2j)} \in \mathbf{Z}$$

Et si p est pair, le terme avec $j = \frac{1}{2}p$ vaut ± 1. Donc ta somme qui representait un quotient de nombres de Fibonacci est bien un nombre entier.

Cela dit en passant, cette somme a aussi une interprétation d'algèbre linéaire. D'abord on forme A^d et ensuite on doit prendre son produit tensoriel symétrique p fois avec elle-même : il s'agit de transférer l'action naturelle de la matrice A^d sur les formes linéaires homogènes $uX + vY$ (espace de dimension 2) à l'action sur les polynômes homogènes de degré p : $u_0X^p + u_1X^{p-1}Y + \cdots + u_pY^p$ (espace de dimension $p + 1$). Mais bon je deviens trop marteau-pilon là (pas pour Hervé, mais pour les innocents agrégatifs tout terrorisés.)

J'en viens maintenant à l'affirmation

$$\boxed{(F_n\,, F_m) = F_{(n,m)}} \qquad \textbf{[A]}$$

Cela ressemble fort à un théorème que nous avons vu dans nos leçons d'algèbre, à propos des polynômes cyclotomiques :

$$(X_n\,, X_m) = X_{(n,m)} \qquad \text{avec } X_n = X^n - 1 \qquad \textbf{[B]}$$

Comme de plus

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

1. pour que la formule soit valable pour $n = 0$ on posera $F_{-1} = 1$.

j'ai pensé qu'on pourrait essayer de s'inspirer de **[B]** pour prouver **[A]**. Il suffit de montrer :

$$n > m \implies (F_n\,, F_m) = (F_{n-m}\,, F_m)$$

car on fait alors une récurrence (généralisée) sur la hauteur $n + m$ (ou sur $\max(n, m)$). Écrivons pour cela, comme dans la preuve de **[B]** :

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha^m - \beta^m)\alpha^{n-m} + \beta^m(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})$$

Cela donne :

$$F_n = \alpha^{n-m}F_m + \beta^m F_{n-m} \tag{C}$$

Si maintenant $d > 0$ est un entier qui divise à la fois F_m et F_{n-m} il en résulte que $\frac{1}{d}F_n \in \mathbf{Z}[\alpha, \beta] = \mathbf{Z}[\alpha, 1 - \alpha] = \mathbf{Z}[\alpha]$ est un polynôme à coefficients entiers en α. Mais comme $\alpha^2 = \alpha + 1$, il existe par récurrence pour tout n une expression $\alpha^n = u_n + v_n\alpha$, avec $u_n, v_n \in \mathbf{Z}$. En fait, il faut :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, en fait :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

Au final nous voyons que $\frac{1}{d}F_n$ admet une écriture $\lambda + \mu\alpha$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$. Si l'on avait $\mu \neq 0$ on pourrait en déduire :

$$\alpha \in \mathbf{Q}, \text{donc aussi : } \sqrt{5} \in \mathbf{Q}$$

Or cela est faux ! Donc $\mu = 0$, donc d divise F_n !

Ainsi tout diviseur d commun à F_m et F_{n-m} divise F_n. Et par ailleurs en écrivant **[C]** sous la forme équivalente :

$$\alpha^m F_n - \alpha^n F_m = (-1)^m F_{n-m} \tag{D}$$

on peut faire le même raisonnement avec un entier d divisant à la fois F_n et F_m. Nécessairement cet entier divise aussi F_{n-m}.

Conclusion : $(F_n\,, F_m) = (F_{n-m}\,, F_m)$, et ensuite **[A]** par récurrence. J'ai envie de revenir un peu en arrière pour commenter et exploiter un peu plus nos relations (la deuxième se prouvant comme la première) :

$$\alpha^n = F_{n-1} + F_n\alpha$$

$$\beta^n = F_{n-1} + F_n\beta$$

Il est bien clair que comme on savait déjà $F_{n-1}+F_{n+1} = \alpha^n+\beta^n$, et que Hervé nous avait dit que $\alpha F_n - \beta F_n = \alpha^n - \beta^n$ on doit pouvoir en éliminant β^n par la somme des deux confirmer le résultat. Voyons : $F_{n-1}+(F_n+F_{n-1})+(2\alpha-1)F_n = 2\alpha^n$. Humm… ça marche !

Bon au final notre formule magique **[C]** peut aussi s'écrire :

$$F_n = (F_{n-m-1} + \alpha F_{n-m})F_m + (F_{m-1} + F_m(1 - \alpha))F_{n-m}$$

soit, en regroupant les termes (et avec $F_{m-1} + F_m = F_{m+1}$) :

$$F_n = F_{n-m-1}F_m + F_{m+1}F_{n-m} + \alpha(F_{n-m}F_m - F_mF_{n-m})$$

ah ? eh bien la nature est bien faite !

$$\boxed{F_n = F_{n-m-1}F_m + F_{m+1}F_{n-m}} \qquad \textbf{[E]}$$

Ah mais bien sûr c'était évident ! Je suis prêt à parier que vos livres favoris balancent cette relation à la figure du taupin stupéfié ! Évidemment une fois qu'on a cela comme point de départ les choses deviennent faciles, plus besoin de passer par l'ouverture à des domaines mathématiques plus vastes !

Bon je suis peut-être mauvais joueur. Peut-être aurais-je dû avant de me lancer dans cette grande cavalcade avoir l'idée d'écrire

$$A^n = A^{n-m}A^m$$

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-m-1} & F_{n-m} \\ F_{n-m} & F_{n-m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix}$$

On retrouve notre formule **[E]** (et une autre d'ailleurs mais en fait c'est la même avec m remplacé par $m + 1$). Mais on avait aussi exprimé F_m via l'équation **[D]**. Est-ce que ça vaut le coup de recommencer les calculs ? je ne crois pas, suffit de définir les F_n pour $n < 0$ en s'assurant que la formule pour A^n restera toujours valable. Comme $\alpha^{-1} = -\beta$, $\beta^{-1} = -\alpha$, il est clair qu'il faut poser $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$. L'équation **[E]** sera alors valable pour tous les n et m entiers relatifs. Il est bien clair que cette relation **[E]** ne peut que jouer un rôle crucial dans l'étude des propriétés des nombres de Fibonacci !

Références

[1] Hervé QUEFFÉLEC, Fibonacci et suites récurrentes, manuscrit, 25 mars 2011.