À propos de la leçon 213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques, nombre π

Jean-François Burnol, septembre 2008

La série entière

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

a un rayon de convergence infini. La façon d'établir les propriétés de sa somme $\exp(z)$ pour z complexe dépend des théorèmes que l'on s'autorise à utiliser. Ainsi, si l'on invoque le théorème de dérivabilité pour la somme d'une série entière dans son disque de convergence, on constate que $\exp(z)$ est sa propre dérivée au sens complexe, et en appliquant ensuite le théorème qui dit que l'on peut développer en série de Taylor en tout point du disque de convergence, on en déduit la formule fondamentale

$$\exp(z+h) = \exp(z)\exp(h) \tag{1}$$

On peut établir directement cette formule de la manière suivante :

Notons $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}$. On écrit :

$$S_N(z_1+z_2) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{\substack{0\leq k_1\leq N\\ 0\leq k_2\leq N\\ k_1+k_2\leq N}} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\frac{z_2^{k_2}}{k_2!}$$

s'il n'y avait pas la condition $k_1+k_2 \leq N$ on aurait le produit $S_N(z_1)S_N(z_2)$. De l'identité

$$S_N(z_1+z_2) - S_N(z_1)S_N(z_2) = -\sum_{\substack{0\leq k_1\leq N\\ 0\leq k_2\leq N\\ k_1+k_2> N}} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!}\frac{z_2^{k_2}}{k_2!}$$

On obtient la majoration :

$$\left|S_N(z_1+z_2)-S_N(z_1)S_N(z_2)\right| \leq \sum_{\substack{0\leq k_1\leq N\\ 0\leq k_2\leq N\\ N<k_1+k_2}} \frac{|z_1|^{k_1}}{k_1!}\frac{|z_2|^{k_2}}{k_2!}$$

$$\leq \sum_{\substack{0\leq k_1\leq 2N\\ 0\leq k_2\leq 2N\\ N<k_1+k_2\leq 2N}} \frac{|z_1|^{k_1}}{k_1!}\frac{|z_2|^{k_2}}{k_2!} = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{(|z_1|+|z_2|)^n}{n!}$$

L'erreur est donc majorée par le reste d'une série convergente et en passant à la limite la formule $\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2)$ en découle.

Directement sur la série on voit que $\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h}$ existe (et vaut 1). En utilisant la formule d'addition (1), on établit alors plus généralement (sans invoquer le théorème général) que exp est dérivable au sens complexe en tout point, et est sa propre dérivée.

À propos de la dérivabilité au sens complexe, il y a la vaste théorie des fonctions holomorphes. Sans aller aussi loin, nous avons juste besoin de savoir que les formules habituelles dans le cas réel (dérivée d'une somme, d'un produit, d'une fonction composée) fonctionnent à l'identique dans le cas complexe.

Et il est aussi utile de remarquer qu'une fonction $f(z)$ dérivable au sens complexe est différentiable comme fonction de (x,y) (avec $z=x+iy$). En effet $f(z+h)=f(z)+f'(z)h+o(|h|)$ et en notant $f'(z)=A+iB$ et $h=h_x+ih_y$, on obtient

$$f(z+h)=f(z)+Ah_x-Bh_y+i(Bh_x+Ah_y)+o(|h|)$$

donc $F(x,y)=f(x+iy)$ est différentiable au point (x,y) avec comme matrice jacobienne $\begin{pmatrix} A & -B\\ B & A\end{pmatrix}$ (ou sa transposée suivant la convention suivie). Le déterminant Jacobien vaut $A^2+B^2=|f'(z)|^2$.

Revenons à la fonction exponentielle. Sa restriction aux valeurs réelles de z est donc la fonction exponentielle réelle, puisque celle-ci est usuellement définie commme solution de l'équation différentielle $y'=y$ avec la valeur initiale $y(0) = 1$. On écrira donc, aussi pour les valeurs complexes de la variable z, e^z au lieu de $\exp(z)$.

Comme $e^z e^{-z} = 1$, on a $\exp(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^\times$. On note que $A = \exp(\mathbf{C})$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbf{C}^\times$. Comme le Jacobien de $\exp(z)$ en z_0, l'exponentielle étant vue comme fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, est non nul, par le théorème d'inversion locale on voit que $A = \exp(\mathbf{C})$ est un ouvert.

Soit B le complémentaire dans $\mathbf{C}^\times$ de A, qui est donc fermé dans $\mathbf{C}^\times$ (pour la topologie induite). Si $b \in B$ alors aussi $bA \subset B$ (par un petit raisonnement utilisant le fait que A est un sous-groupe). Or bA est un voisinage ouvert de b car A contient un voisinage de 1. Donc B est ouvert. Donc A est à la fois ouvert et fermé. Donc $A = \mathbf{C}^\times$ par connexité.

L'application exponentielle est donc surjective. Elle ne peut pas être bijective car $\{1, -1\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{C}^\times$ alors que $\mathbf{C}$ n'a pas de sous-groupe fini non trivial.

Revenant à la définition on a la formule importante

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$$

Donc

$$\left|e^z\right|^2 = e^z e^{\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)} \implies \left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Ainsi $\exp(z)$ est de module 1 si et seulement si z est imaginaire pur.

Le noyau de l'application exponentielle est donc composé de nombres imaginaires purs, il est de la forme iK avec K un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. En invoquant le théorème d'inversion locale comme plus haut, on voit que iK est discret dans $\mathbf{C}$ donc K est un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$.[1] Ainsi K est de la forme $a\mathbf{Z}$ pour un certain a, qui est non nul, car nous avons vu que exp n'est pas injective. On peut prendre $a > 0$, et donc a est la plus petite solution positive à l'équation $\exp(ix) = 1$. On en déduit $\exp(i\frac{a}{2}) = -1$ (puisque son carré doit valoir 1 mais qu'elle-même ne peut valoir 1 car $\frac{a}{2} < a$). Deux

1. aussi s'il n'était pas discret il serait dense et par continuité on aurait $e^{it} = 1$ pour tous les $t \in \mathbf{R}$ ce qui est absurde pour plein de raisons.

possibilités se présentent :

$$\exp(i\frac{a}{4}) = i \qquad \text{ou} \qquad \exp(i\frac{a}{4}) = -i$$

Afin d'établir celle qui est valide, il est commode de séparer, pour t réel, e^{it} en parties réelles et imaginaires :

$$e^{it} = C(t) + iS(t) \qquad C(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad S(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \tag{2}$$

Les fonctions réelles de la variable rélle t, $C(t)$ et $S(t)$ sont données par les célèbres séries :

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On pourrait aussi les considérer comme fonction de la variable complexe, mais nous nous limitons ici à $t \in \mathbb{R}$. De (2) et de $\exp' = \exp$ découle

$$C'(t) = -S(t) \qquad \text{et} \qquad S'(t) = C(t)$$

ce que l'on pourrait aussi voir à partir des séries : le raisonnement le plus simple consistant à tout d'abord justifier les équations intégrales

$$C(t) = 1 - \int_0^t S(u)\,du \qquad S(t) = \int_0^t C(u)\,du$$

par la permutation des séries et de l'intégration. Les formules « trigonométriques » pour $C(t_1 + t_2)$, $S(t_1 + t_2)$ que je n'écris pas ici découlent de (2) et de la formule d'addition (1) pour l'exponentielle complexe.

La formule utile

$$C(t)^2 + S(t)^2 = 1$$

qui exprime $|e^{it}| = 1$ (ou représente le calcul de $C(t - t)$) n'est pas immédiatement perceptible sur les séries, mais il suffirait de calculer la dérivée pour confirmer que le terme de gauche est constant.

Les périodicités $C(t + a) = C(t)$ et $S(t + a) = S(t)$ (puisque $e^{ia} = 1$) sont encore moins immédiatement perceptibles sur les séries. Pour cette périodicité on voit l'intérêt qu'il y a eu à considérer e^z comme une fonction (à valeurs complexes) du nombre complexe z.

Faisons l'étude des variations des fonctions C et S. Comme $S(t) = t + o(t)$, elle est initialement positive pour $t > 0$ petit. On a $S(t_0) = 0$ si et seulement si e^{it_0} est réel, donc si et seulement si $e^{it_0} = \pm 1$. Comme on connaît le noyau $ia\mathbf{Z}$ du morphisme exp, ainsi qu'une solution de $e^{it} = -1$, ceci équivaut à $t_0 \in a\mathbf{Z} \cup (\frac{a}{2} + a\mathbf{Z})$, c'est-à-dire $t_0 \in \frac{1}{2}a\mathbf{Z}$. Le premier zéro de S pour $t > 0$ est donc $\frac{1}{2}a$. Ainsi $S > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}a[$.

En particulier $S(\frac{1}{4}a) > 0$. Donc $e^{i\frac{a}{4}}$ ne vaut pas $-i$ mais bien $+i$, et de plus $S(\frac{1}{4}a) = +1$. Comme $C^2 + S^2 = 1$, il y a donc en $t = \frac{1}{4}a$ un maximum de S, et par conséquent sa dérivée s'y annule donc $C(\frac{1}{4}a) = 0$.

Comme $C' = -S$, C est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}a]$. Elle vaut 1 en 0 et vaut -1 en $\frac{1}{2}a$. Ainsi $\frac{1}{4}a$ est l'unique zéro de $C(x)$ pour $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$. Et l'on voit que C est strictement positive pour $0 < x < \frac{1}{4}a$ et donc que S est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{4}a]$, atteignant son maximum 1 en $\frac{1}{4}a$. À ce stade on a le tableau des variations de C et S sur $[0, \frac{1}{4}a]$. Comme C est paire et S impaire on a leurs variations sur $[-\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a]$. Finalement comme

$$C(t + \frac{a}{2}) = -C(t) \qquad S(t + \frac{a}{2}) = -S(t)$$

puisque $e^{i\frac{a}{2}} = -1$, on peut compléter les tableaux des variations pour $\mathbf{R}$ tout entier. On notera aussi comme conséquence de $\exp(i\frac{a}{4}) = i$, les formules

$$C(t + \frac{a}{4}) = -S(t) \qquad S(t + \frac{a}{4}) = +C(t)$$

Comme C est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}a]$ elle établit une bijection de cet intervalle sur $[-1, 1]$. Ainsi tout point $z = x + iy$ sur le cercle unité, dans le demi-plan supérieur $y \geq 0$, s'écrit de manière unique $z = e^{it} = C(t) + iS(t)$ avec $0 \leq t \leq \frac{1}{2}a$. Si l'on calcule alors la longueur de ce demi-cercle, vu comme un arc paramétré on obtient :

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}a} (C'(t)^2 + S'(t)^2)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}a} (S(t)^2 + C(t)^2)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}a} dt = \frac{1}{2}a$$

Cette longueur étant notée traditionnellement π, il vient :

$$a = 2\pi$$

Donc notre $\frac{1}{2}a$ est π et notre $\frac{1}{4}a$ est $\frac{\pi}{2}$, et $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$. Le noyau de l'exponentielle complexe est $2\pi i\mathbf{Z}$.

Ayant ainsi compris la paramétrisation du cercle par les fonctions C et S on nomme ces dernières cosinus et sinus, et on peut établir toutes leurs propriétés, et aussi définir les autres fonctions trigonométriques usuelles, comme la tangente ou la cotangente. Le lien avec les méthodes à la Archimède pour obtenir la longueur d'un arc de cercle passerait alors par des formules du type $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin(\frac{x}{2^n}) = x$, ou autres, conséquences d'équivalents comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, modulo bien sûr la discussion générale de la « longueur » d'un arc paramétré en général et des façons équivalentes de l'obtenir.

Je voudrais pour finir rappeler que l'on n'a évidemment pas besoin de construire les fonctions cosinus et sinus pour paramétrer une partie du cercle : la formule $y = \sqrt{1-x^2}$ marche parfaitement ! (par exemple pour $-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x \leq +\frac{1}{2}\sqrt{2}$). Ou encore, on peut aussi pour $x > 0$, poser $y = \lambda x$, on a $x = (1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}$, $y = \lambda(1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}$. On calcule $ds^2 = (x'(\lambda)^2 + (x(\lambda) + \lambda x'(\lambda))^2)d\lambda^2 = x(\lambda)^2(\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} + (1-\lambda\frac{\lambda}{1+\lambda^2})^2)d\lambda^2 = \frac{d\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}$. Donc $ds = \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$. Pour $0 \leq \lambda \leq 1$ on obtient ainsi un paramétrage du huitième de cercle allant de 1 à $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. La « longueur » L de cet arc paramétré est ainsi $L = \int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$. Cette valeur sera la même que celle donnée par la paramétrisation via cos et sin, à savoir donc $\frac{\pi}{4}$. On reconnaît dans l'abscisse curviligne s comme fonction de λ la fonction Arctangente. L'intérêt des fonctions cosinus et sinus est d'assurer une paramétrisation (régulière : vecteur vitesse partout non nul) de **tout** le cercle.

Complément : le Logarithme.

La discussion de la surjectivité sur $\mathbf{C}^\times$ de l'exponentielle complexe serait plus simple si l'on disposait explicitement d'une inversion locale. Dans le cas réel, c'est ce que fait le logarithme. Posons pour h complexe, $|h| < 1$:

$$L(1+h) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n}$$

Le rayon de convergence de cette série vaut un, mais déjà avec l'exponentielle on n'a pas voulu utiliser trop de résultats généraux sur les séries entières dans le champ complexe. Il sera commode d'utiliser plutôt la formule intégrale :

$$L(1+h) = \int_0^1 \frac{h}{1+ht}\,dt$$

Cette formule a un sens si le segment $[1, 1+h]$ dans le plan complexe ne passe pas par zéro, autrement dit $1+h \in \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$. Lorsque $|h| < 1$ on peut faire un développement en série sous le signe d'intégration puis après permutation retrouver la série précédente pour $L(1+h)$. Pour tout $k \neq 0$ tel que $1+h+k \in \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$:

$$\frac{L(1+h+k) - L(1+h)}{k} = \int_0^1 \frac{1}{(1+ht)(1+(h+k)t)}\,dt$$

La limite pour $k \to 0$ se justifie immédiatement via :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+ht)(1+(h+k)t)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+ht)(1+ht)}\,dt - k\int_0^1 \frac{t}{(1+ht)^2(1+(h+k)t)}\,dt$$

Ainsi on prouve que $h \mapsto L(1+h)$ est dérivable au sens complexe avec

$$L'(1+h) = \int_0^1 \frac{1}{(1+ht)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{h}\frac{1}{1+ht}\right]_0^1 = \frac{1}{1+h}$$

(on a supposé dans le calcul intermédiaire $h \neq 0$ mais le résultat final vaut aussi pour $h = 0$).

La fonction $G(h) = (1+h)\exp(-L(1+h))$ est donc dérivable au sens complexe sur $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$, et on trouve que sa dérivée est identiquement nulle. Donc, comme cela se justifie aisément en revenant à des fonctions de la variable réelle, G est constante et :

$$1+h \in \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0] \implies 1+h = \exp(L(1+h))$$

Ainsi l'image $\exp(\mathbf{C})$ contient $\mathbf{C}\setminus]-\infty,0]$ et comme en particulier $i = \exp(L(i))$, elle contient aussi $i(\mathbf{C}\setminus]-\infty,0])$, et finalement $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$. La fonction L est le Logarithme complexe, ou plus précisément sa détermination principale. Avec la méthode de cette annexe, on n'a plus besoin de faire appel au théorème d'inversion locale pour les fonctions de deux variables réelles (ou l'inversion pour une série entière) ou à la notion topologique de connexité de notre première méthode.

Annexe : retour sur C et S.

Imaginons que notre point de départ soit les séries, en la variable réelle t :

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Elles ont un rayon de convergence infini et

$$C(t) = 1 - \int_0^t S(u)\,du \qquad S(t) = \int_0^t C(u)\,du$$

se justifie en intégrant terme à terme. Donc C et S, qui sont continues, sont aussi C^1 avec

$$C'(t) = -S(t) \qquad \text{et} \qquad S'(t) = C(t)$$

Elles sont donc de classe C^∞. On a

$$C(t)^2 + S(t)^2 = 1$$

en constatant que la dérivée est nulle.

On a $C(0) = 1$. Supposons $C(t) \geq 0$ pour $0 \leq t \leq T$. De $S' = C$ on a S croissante et donc $S(t) \geq 0$ pour $0 \leq t \leq T$. Ainsi $0 \leq C \leq 1$ et $0 \leq S \leq 1$ pour $0 \leq t \leq T$. Mais alors

$$1 = C(t)^2 + S(t)^2 \leq C(t) + S(t)$$

et en intégrant il vient $T \leq S(T) + (1 - C(T)) \leq 2$. En prenant $T = 3$ on conclut qu'il existe $0 < t \leq 3$ avec $C(t) < 0$, donc il existe $t_0 > 0$ avec $C(t_0) = 0$ et nous supposerons que t_0 désigne le plus petit d'entre eux.

Ainsi $C(t) > 0$ pour $0 \leq t < t_0$ et S sera strictement croissante sur $[0, t_0]$, donc positive sur $]0, t_0]$ et comme $C(t_0) = 0$ on a $S(t_0) = 1$. À ce stade on a le tableau des variations de C et S sur l'intervalle $[0, t_0]$: S croît strictement de 0 à 1 et C décroît strictement de 1 à 0. Comme C est paire et S impaire on a leurs variations sur $[-t_0, +t_0]$.

Posons alors $c(t) = S(t_0 - t)$ et $s(t) = C(t_0 - t)$. Le système différentiel

$$c'(t) = -s(t) \qquad \text{et} \qquad s'(t) = c(t)$$

est vérifié ainsi que

$$c(0) = 1 \qquad s(0) = 0$$

Par unicité de la solution d'un système différentiel linéaire, on a $c(t) = C(t)$ et $s(t) = S(t)$ pour tous les t. Alors :

$$C(t + t_0) = s(-t) = S(-t) = -S(t) \qquad S(t + t_0) = c(-t) = C(t)$$

$$C(t + 2t_0) = -C(t) \qquad S(t + 2t_0) = -S(t)$$

On peut donc « dessiner » les fonctions C et S sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elles sont $4t_0$-périodiques. De plus de 0 à $2t_0$ la fonction C décroît strictement et continûment de 1 à -1. Ainsi tout nombre x entre -1 et 1 est de manière unique de la forme $C(t)$ avec $t \in [0, 2t_0]$. Sur cet intervalle $S(t) \geq 0$. Alors tout Point P sur le demi-cercle unité supérieur est de manière unique de la forme $(C(t), S(t))$ avec $t \in [0, 2t_0]$. Considérant le demi-cercle comme un arc paramétré on calcule sa longueur comme tout-à-l'heure et on obtient $2t_0$. Donc $\pi = 2t_0$ et $t_0 = \frac{\pi}{2}$. De plus les points Q sur le demi-cercle supérieur ayant $x(Q) \geq x(P)$ sont exactement les $(C(u), S(u))$ avec $0 \leq u \leq t$ si $P = (C(t), S(t))$. Donc la « longueur » de l'arc circulaire allant du point 1 à P se calcule avec cette paramétrisation et on trouve comme résultat t. Ce qui identifie t à l'« angle » sous lequel on voit cet arc depuis l'origine. Toute la trigonométrie en découle.

Remarquons qu'au final on retrouve que tout nombre complexe de module 1 est de la forme e^{it}, donc que la fonction exponentielle complexe est surjective.