Asymptotique des séries «de Riemann» et formule de Stirling, par diverses méthodes dont celle des polynômes de Bernoulli et de la formule d'Euler-MacLaurin

Jean-François Burnol, 17 février 2010

Cher Monsieur,

en réponse à vos questions.

Tout d'abord, un aparté sur le fait que l'appellation «séries de Riemann» usitée en agrégation est assez étrange, et qu'il faudrait plutôt parler de «séries d'Euler», d'autant plus que nous restons avec la variable réelle. Mais bon, chaque groupe socio-culturel a ses marqueurs, et l'on n'y peut pas grand chose.

Bon, donc vous vous intéressez à la série de terme général $u_n(a) = n^{-a}$, avec dans un premier temps $a > 1$. Vous avez posé

$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-a}$$

et vous recherchez un développement asymptotique pour $n \to \infty$. Je remarque tout de suite que pour $a \leq 1$ la série étant divergente le problème analogue serait celui du développement asymptotique de

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} k^{-a} \ .$$

Pour $a > 1$, $\zeta(a) = S_n(a) + R_n(a)$ est une valeur finie indépendante de n, et par conséquent donner un développement pour $S_n(a)$ est équivalent à notre problème initial concernant $R_n(a)$, et l'on pourrait considérer que le vrai problème fondamental est d'estimer $S_n(a)$ quel que soit a. Mais se limiter dans un premier temps à $a > 1$ et à $R_n(a)$ a aussi ses mérites.

1 Approche «à la main»

On peut avoir l'idée que $R_n(a)$ doit être «proche» de $\int_n^\infty t^{-a}\,dt = \frac{1}{a-1}n^{1-a}$. Pour obtenir l'équivalence (qui pourrait être démentie) $R_n(a) \sim \frac{1}{a-1}n^{1-a}$ posons

$$v_k(a) = \frac{1}{a-1}(k-1)^{1-a} - \frac{1}{a-1}k^{1-a} \ ,$$

de sorte qu'avec $T_n(a) = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(a)$ on a exactement

$$T_n(a) = \frac{1}{a-1} n^{1-a} \ .$$

Pour établir $R_n(a) \sim T_n(a)$ (et donc $R_n(a) \sim \frac{1}{a-1} n^{1-a}$) il suffit donc de s'assurer de l'équivalence :

$$k^{-a} \sim \frac{1}{a-1}(k-1)^{1-a} - \frac{1}{a-1} k^{1-a} \ ,$$

qui est vite confirmée.

Plus précisément, et en vue de l'objectif de donner un développement asymptotique de $R_n(a)$ avec (disons) trois termes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} v_k(a) = \frac{1}{a-1}(k-1)^{1-a} - \frac{1}{a-1} k^{1-a} &= \frac{1}{a-1} k^{1-a} \left((1 - \frac{1}{k})^{-(a-1)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a-1} k^{1-a} \left(\frac{a-1}{k} + \frac{1}{2} \frac{(a-1)a}{k^2} + \frac{1}{6} \frac{(a-1)a(a+1)}{k^3} + o(k^{-3}) \right) \end{aligned}$$

$$v_k(a) = k^{-a} + \frac{a}{2} k^{-a-1} + \frac{a(a+1)}{6} k^{-a-2} + o(k^{-a-2}) \tag{1}$$

En remplaçant a par $a+1$ puis $a+2$ (tout en restant à l'ordre $o(k^{-a-2})$) on obtient un système triangulaire, dont on déduit l'expression de k^{-a} à $o(k^{-a-2})$ près comme une combinaison linéaire de $v_k(a)$, $v_k(a+1)$, et $v_k(a+2)$. En sommant cela donne $R_n(a)$ comme combinaison linéaire de n^{1-a}, n^{-a} et n^{-a-1} à $o(n^{-a-1})$ près. De manière équivalente on peut commencer par sommer l'expression 1, ce qui donne :

$$\frac{1}{a-1} n^{1-a} = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(a) = R_n(a) + \frac{a}{2} R_n(a+1) + \frac{a(a+1)}{6} R_n(a+2) + o(n^{-a-1})$$

Dans le terme en «petit o» on a utilisé le résultat déjà connu $R_n(a+2) \sim \frac{1}{a+1} n^{-a-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-1} n^{1-a} &= R_n(a) + \frac{a}{2} R_n(a+1) + \frac{a(a+1)}{6} R_n(a+2) + o(n^{-a-1}) \\ \frac{1}{a} n^{-a} &= R_n(a+1) + \frac{a+1}{2} R_n(a+2) + o(n^{-a-1}) \\ \frac{1}{a+1} n^{-a-1} &= R_n(a+2) + o(n^{-a-1}) \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} n^{-a} &= R_n(a+1) + \frac{1}{2} n^{-a-1} + o(n^{-a-1}) \\ \frac{1}{a-1} n^{1-a} &= R_n(a) + \frac{a}{2}(\frac{1}{a} n^{-a} - \frac{1}{2} n^{-a-1}) + \frac{a(a+1)}{6} \frac{1}{a+1} n^{-a-1} + o(n^{-a-1}) \end{aligned}$$

Au final :

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1} n^{1-a} - \frac{1}{2} n^{-a} + \frac{a}{12} n^{-a-1} + o(n^{-a-1}) \tag{2}$$

Imaginons que l'on veuille un terme de plus, il faut alors partir de

$$v_k(a) = k^{-a} + \frac{a}{2}k^{-a-1} + \frac{a(a+1)}{6}k^{-a-2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}k^{-a-3} + o(k^{-a-3}) \tag{3}$$

et donc de

$$\frac{1}{a-1}n^{1-a} = R_n(a) + \frac{a}{2}R_n(a+1) + \frac{a(a+1)}{6}R_n(a+2) + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}R_n(a+3) + o(n^{-a-2})$$

Pas besoin de reposer un système triangulaire, puisque tous les termes sauf $R_n(a)$ sont connus déjà à l'ordre $o(n^{-a-2})$ compte tenu de notre résultat 2 pour $a+1$, $a+2$, …. De plus seul le terme en n^{-a-2} nous intéresse, donc :

$$\frac{1}{a-1}n^{1-a} = R_n(a) + \cdots + \left(\frac{a}{2}\frac{a+1}{12} + \frac{a(a+1)}{6}(-\frac{1}{2}) + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}\frac{1}{a+2}\right)n^{-a-2} + o(n^{-a-2})$$

Le dernier terme s'annule !

Donc, en fait :

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} - \frac{1}{2}n^{-a} + \frac{a}{12}n^{-a-1} + o(n^{-a-2}) \tag{4}$$

Allez, faisons un effort supplémentaire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-1}n^{1-a} &= R_n(a) + \frac{a}{2}R_n(a+1) + \frac{a(a+1)}{6}R_n(a+2)\\ &\quad + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}R_n(a+3) + \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{120}R_n(a+4) + o(n^{-a-3})\end{aligned}$$

On utilise 4 pour $a+1$, $a+2$, …, $a+4$, mais en ne prenant que le dernier terme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-1}n^{1-a} &= R_n(a) + \cdots +\\ &\quad \left(\frac{a}{2}0 + \frac{a(a+1)}{6}\frac{a+2}{12} + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}(-\frac{1}{2}) + \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{120}\frac{1}{a+3}\right)n^{-a-3}\\ &\quad + o(n^{-a-3})\\ &= R_n(a) + \cdots + \frac{1}{30}\frac{a(a+1)(a+2)}{24}n^{-a-3} + o(n^{-a-3})\end{aligned}$$

et finalement :

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} - \frac{1}{2}n^{-a} + \frac{a}{12}n^{-a-1} - \frac{a(a+1)(a+2)}{30 \cdot 24}n^{-a-3} + o(n^{-a-3}) \tag{5}$$

Clairement quelque chose de systématique se met en place. Supposons par récurrence :

$$\begin{aligned}R_n(a) &= \frac{1}{a-1}n^{1-a} + c_1\frac{1}{n^a} + c_2\frac{a}{n^{a+1}} + c_3\frac{a(a+1)}{n^{a+2}} + c_4\frac{a(a+1)(a+2)}{n^{a+3}} + \dots\\ &\quad + \cdots + c_N\frac{a\cdots(a+N-2)}{n^{a+N-1}} + o(n^{-a-N+1})\end{aligned} \tag{6}$$

Bien sûr l'hypothèse de récurrence est que cela vaut pour tous les $a > 1$. Comme :

$$\frac{1}{a-1}n^{1-a} = R_n(a) + \frac{a}{2}R_n(a+1) + \frac{a(a+1)}{6}R_n(a+2) + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}R_n(a+3) + \dots + \frac{a(a+1)(a+2)(a+N)}{(N+2)!}R_n(a+N+1) + o(n^{-a-N})$$

il suffit d'invoquer 6 (tronqué à $o(n^{-a-N})$) pour $a+1$, $a+2$, ..., $a+N+1$ pour voir que 6 s'auto-améliore avec un terme supplémentaire :

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} + d_1(a)n^{-a} + d_2(a)n^{-a-1} + d_3(a)n^{-a-2} + \dots + d_{N+1}(a)n^{-a-N} + o(n^{-a-N})$$

Par unicité d'un développement asymptotique, on n'a pas besoin de vérifier la forme des $d_k(a)$ pour $k < N+1$, il suffit de s'intéresser à $d_{N+1}(a)$ afin de compléter notre récurrence. On a :

$$\begin{aligned} -d_{N+1} = & \frac{a}{2}c_N \cdot (a+1)\cdots(a+N-1) + \frac{a(a+1)}{6}c_{N-1} \cdot (a+2)\cdots(a+N-1) \\ & + \frac{a(a+1)(a+2)}{24}c_{N-2} \cdot (a+3)\cdots(a+N-1) + \dots \\ & + \frac{a(a+1)(a+2)(a+N-1)}{(N+1)!}c_1 + \frac{a(a+1)(a+2)(a+N)}{(N+2)!}\frac{1}{a+N} \end{aligned}$$

Donc la récurrence est valable et on a de plus :

$$-c_{N+1} = \frac{1}{2}c_N + \frac{1}{6}c_{N-1} + \frac{1}{24}c_{N-2} + \dots + \frac{1}{(N+1)!}c_1 + \frac{1}{(N+2)!}$$

Ce qui peut aussi s'écrire, avec $c_0 = 1$, et en posant $c_k = \frac{\gamma_k}{k!}$, sous la forme :

$$-(N+2)\gamma_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N+2}{k}\gamma_k \tag{7}$$

L'équation 7 donne bien, pour $N = 0$: $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$. Au final, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $\gamma_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ γ_n défini récursivement par l'équation 7. En particulier $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{1}{6}$ et $\gamma_3 = 0$. Pour tout $a > 1$ on a le développement asymptotique :*

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} + \frac{1}{6}\cdot\frac{a}{2\cdot n^{a+1}} + \dots + \gamma_N \frac{a(a+1)\cdots(a+N-2)}{N!\cdot n^{a+N-1}} + o(\frac{1}{n^{a+N-1}})$$

Calculons les premiers γ_n : $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$, $-3\gamma_2 = 1 - \frac{3}{2} \implies \gamma_2 = \frac{1}{6}$, $-4\gamma_3 = 1 - \frac{4}{2} + 6\frac{1}{6} = 0$, $-5\gamma_4 = 1 - \frac{5}{2} + 10\frac{1}{6} + 30\cdot 0 \implies \gamma_4 = -\frac{1}{30}$, $-6\gamma_5 = 1 - \frac{6}{2} + 15\frac{1}{6} + 20\cdot 0 + 15\frac{-1}{30} = 0$, $-7\gamma_6 = 1 - \frac{7}{2} + 21\frac{1}{6} + 0 + 35\frac{-1}{30} + 0 = -\frac{1}{6} \implies \gamma_6 = \frac{1}{42}$, $-8\gamma_7 = 1 - \frac{8}{2} + 28\frac{1}{6} + 0 + 70\frac{-1}{30} + 0 + 28\frac{1}{42} = 0$, et $-9\gamma_8 = 1 - \frac{9}{2} + 36\frac{1}{6} + 0 + 126\frac{-1}{30} + 0 + 84\frac{1}{42} + 0 = \frac{3}{10} \implies \gamma_8 = \frac{-1}{30}$ puis finalement $-10\gamma_9 = 1 - 5 + 45\frac{1}{6} + 0 + 210\frac{-1}{30} + 0 + 210\frac{1}{42} + 0 + 45\frac{-1}{30} = 0$, donc $\gamma_9 = 0$.

Ainsi : $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{1}{6}$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = \frac{-1}{30}$, $\gamma_5 = 0$, $\gamma_6 = \frac{1}{42}$, $\gamma_7 = 0$, $\gamma_8 = \frac{-1}{30}$, $\gamma_9 = 0$.

Les savants auront reconnu en les γ_k les Nombres de Bernoulli. La prochaine section explique pourquoi ils sont apparus ici (et pourquoi les γ_{2j+1} sont nuls à partir de γ_3 !).

2 Variations autour d'Euler et MacLaurin

Souvent, les intégrales servent à calculer des séries.

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^a}\,dt = [(t-k)\frac{1}{t^a}]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} (t-k)\frac{a}{t^{a+1}}\,dt = \frac{1}{(k+1)^a} + \int_0^1 u\frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

Et donc, en posant (ici n et a sont fixés), pour $0 \leq u \leq 1$:

$$f_n(u) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\ , \tag{8}$$

il vient :

$$\frac{1}{a-1}n^{1-a} = R_n(a) + \int_0^1 u f_n(u)\,du$$

Il suffira maintenant d'intégrer par parties. Cependant, attention, nous voulons faire en sorte qu'il n'y ait pas séparément $f_n(1)$ ou $f_n(0)$, mais uniquement leur combinaison $f_n(0) - f_n(1) = \frac{a}{n^{a+1}}$. Pour cela il nous faudrait une primitive $B(u)$ de u avec $B(1) = B(0)$. Mais c'est impossible car $B(1) - B(0) = \int_0^1 u\,du$. Donc nous faisons la petite manipulation suivante :

$$\frac{1}{a-1}n^{1-a} = R_n(a) + \int_0^1 (u-\frac{1}{2})f_n(u)\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 f_n(u)\,du = R_n(a) + \int_0^1 (u-\frac{1}{2})f_n(u)\,du + \frac{1}{2}\frac{1}{n^a}$$

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} - \int_0^1 (u-\frac{1}{2})f_n(u)\,du \tag{9}$$

À chaque étape de nos intégrations par parties successives nous voulons que la primitive B considérée ait la propriété $B(1) = B(0)$ et donc il nous faut maintenir l'analogue de l'annulation $\int_0^1 (u-\frac{1}{2})\,du = 0$ à toutes les primitives.

Parmi les primitives $C_2(u) = \frac{1}{2}(u-\frac{1}{2})^2 + c$ de $C_1(u) = u - \frac{1}{2}$, il y en aura une seule qui aura elle-aussi la propriété $\int_0^1 C_2(u)\,du = 0$: il faut prendre $c = -\frac{1}{2}\int_0^1 (u-\frac{1}{2})^2\,du = -\frac{1}{24}$, donc $C_2(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2} + \frac{1}{12}$. De même nous définissons $C_3(u)$ comme étant la primitive de $C_2(u)$ avec $\int_0^1 C_3(u)\,du = 0$. Comme $C_2(u)$ est invariant par $u \mapsto 1-u$, la formule $C_3(u) = \int_{\frac{1}{2}}^u C_2(t)\,dt$ fonctionne, car elle garantit $C_3(1-u) = -C_3(u)$ et par conséquent elle garantit aussi $\int_0^1 C_3(u)\,du = 0$. Comme $C_4(u)$ sera de la forme $\int_{\frac{1}{2}}^u C_3(t)\,dt + c$ on aura automatiquement $C_4(1-u) = C_4(u)$. Donc, il faudra à nouveau pour C_5 prendre la primitive de C_4, impaire en $u - \frac{1}{2}$ ($C_5(u) = \int_{\frac{1}{2}}^u C_4(t)\,dt$). Par récurrence, nous pouvons affirmer que les C_{2n} sont paires en $u - \frac{1}{2}$ tandis que les C_{2n+1} sont impaires. Alors $C_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0$ et, pour $n \geq 1$, $C_{2n+1}(0) = -\int_0^{\frac{1}{2}} C_{2n}(u)\,du = -\frac{1}{2}\int_0^1 C_{2n}(u)\,du = 0$. Au final :

$$
\begin{aligned}
C_1(u) &= u - \frac{1}{2} \\
C'_{n+1}(u) &= C_n(u), \qquad \int_0^1 C_{n+1}(u)\,du = 0 \\
C_{2n}(1-u) &= C_{2n}(u) \\
C_{2n+1}(1-u) &= -C_{2n+1}(u) \\
n \geq 1 &\implies C_{2n+1}(0) = C_{2n+1}(1) = 0
\end{aligned}
$$

On pose $C_{2n} = C_{2n}(0) = C_{2n}(1)$ et $C_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$.

Par intégrations par parties successives, pour f de classe C^∞ :

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 (u - \frac{1}{2})f(u)\,du = [-C_2(u)f(u)]_0^1 + \int_0^1 C_2(u)f'(u)\,du &= C_2(f(0) - f(1)) + \int_0^1 C_2(u)f'(u)\,du \\
&= C_2(f(0) - f(1)) - \int_0^1 C_3(u)f''(u)\,du \\
&= C_2(f(0) - f(1)) + C_4(f''(0) - f''(1)) - \int_0^1 C_5(u)f^{(4)}(u)\,du \\
&= \sum_{k=1}^{N} C_{2k}(f^{(2k-2)}(0) - f^{(2k-2)}(1)) - \int_0^1 C_{2N+1}(u)f^{(2N)}(u)\,du
\end{aligned}
$$

Si nous appliquons cela à

$$f_n(u) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a}{(u+m)^{a+1}}$$

On aura :

$$
\begin{aligned}
f_n^{(2k)}(u) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2k)}{(u+m)^{a+1+2k}} \\
\implies f_n^{(2k-2)}(0) - f_n^{(2k-2)}(1) &= \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2k-2)}{n^{a-1+2k}}
\end{aligned}
$$

Ainsi on a

$$
\begin{aligned}
R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} + \sum_{k=1}^{N} C_{2k}\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2k-2)}{n^{a-1+2k}} \\
- \int_0^1 C_{2N+1}(u)f_n^{(2N)}(u)\,du
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un développement asymptotique, on écrit

$$\left|\int_0^1 C_{2N+1}(u)f_n^{(2N)}(u)\,du\right| \leq A_N \int_0^1 f_n^{(2N)}(u)\,du = A_N \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2N-1)}{n^{a+2N}}$$

avec $A_N = \sup_{0 \leq u \leq 1} |C_{2N+1}(u)|$. Ainsi, pour $n \to \infty$ (et avec N fixé) l'intégrale est bien un petit o du dernier terme.

On a confirmé le résultat de notre première approche et $c_j = C_j$, pour $j \geq 1$. L'avantage considérable est qu'ici nous avons une formule exacte, pas seulement un développement asymptotique. De plus on a une explication pour l'annulation des c_{2j+1}. Dans l'autre sens, la première approche nous donne elle la formule de récurrence :

$$-C_{N+1} = \frac{1}{2}C_N + \frac{1}{6}C_{N-1} + \frac{1}{24}C_{N-2} + \cdots + \frac{1}{(N+1)!}C_1 + \frac{1}{(N+2)!}$$

Les **Nombres et polynômes de Bernoulli** B_n et $B_n(t)$ sont définis par les relations (qui font de $B_n(t)$ un polynôme unitaire de degré n) :

$$B_0(t) = 1 \qquad B'_{n+1}(t) = (n+1)B_n(t) \qquad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$$

$$C_n(t) = \frac{B_n(t)}{n!} \qquad B_n = B_n(0) = n!C_n$$

Compte tenu de notre résultat 10, et par unicité, les nombres de Bernoulli sont identiques aux γ_n du **Théorème 1**, et par conséquent :

$$-(N+2)B_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N+2}{k} B_k$$

Le théorème devient :

Théorème 2. *On a la formule exacte :*

$$R_n(a) = \frac{1}{a-1}n^{1-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} + \sum_{k=1}^{N} B_{2k}\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2k-2)}{(2k)!\cdot n^{a-1+2k}}$$
$$- \int_0^1 \frac{B_{2N+1}(u)}{(2N+1)!} f_n^{(2N)}(u)\,du$$

L'intégrale est, pour $n \to \infty$, négligeable devant le dernier terme de la somme finie.

3 Les cas $a = 1$ et $0 < a < 1$

On veut traiter aussi $a = 1$ et $0 < a < 1$: la fonction zêta de Riemann va intervenir dans ce dernier cas. On veut un développement pour

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

Nous prenons le point de départ de la deuxième approche, un peu modifié car nous sommes instruits par l'expérience :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^a}\,dt = [(t-k-\frac{1}{2})\frac{1}{t^a}]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} (t-k-\frac{1}{2})\frac{a}{t^{a+1}}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{(k+1)^a} + \frac{1}{k^a}) + \int_0^1 C_1(u)\frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

On somme pour $k = 1, \dots, n-1$:

$$(11) \qquad \frac{1}{1-a}(n^{1-a}-1) = \int_1^n \frac{1}{t^a}\,dt = S_n(a) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} + \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

Pour $a = 1$, le premier terme est $\log n$ bien sûr. Pour l'instant restons avec $0 < a < 1$. Ainsi :

$$(12) \qquad S_n(a) - \frac{n^{1-a}}{1-a} = \frac{-1}{1-a} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} - \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

La série dans l'intégrale converge normalement, et par conséquent il existe

$$\zeta(a) = \lim_{n\to\infty} \left(S_n(a) - \frac{n^{1-a}}{1-a} \right) = \frac{-1}{1-a} + \frac{1}{2} - \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

Pour $a > 1$ nous avons déjà évalué l'intégrale, car d'après 9 et 8

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{2} - \int_0^1 (u - \frac{1}{2}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

Et donc

$$(13) \qquad a > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2} - \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

Ainsi, la formule qui, pour $0 < a < 1$ donne $\lim_{n\to\infty} \left(S_n(a) - \frac{n^{1-a}}{1-a} \right)$, limite que nous avons notée $\zeta(a)$, donne pour $a > 1$ la somme de la série «de Riemann» $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \lim S_n(a)$, que nous notons aussi $\zeta(a)$.

Revenons à 12 que nous mettons sous la forme :

$$(14) \qquad S_n(a) = \frac{n^{1-a}}{1-a} + \zeta(a) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} + \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a}{(u+k)^{a+1}}\,du$$

Comme par enchantement nous retombons sur l'intégrale que nous avions déjà pour $a > 1$. Le fait d'avoir $a < 1$ (ou $a = 1$) dans cette intégrale ne change rien à l'affaire, ce qui importe c'est que $a > 0$ donne la convergence normale sur $[0, 1]$ de la série vers une fonction que l'on peut dériver terme à terme. [1] Comme pour $a > 1$ on a $\zeta(a) = S_n(a) + R_n(a)$ la formule 14 équivaut à notre formule antérieure 9. Ainsi :

Théorème 3. *Pour $a > 0$, $a \neq 1$ on a la formule exacte :*

$$S_n(a) = \frac{n^{1-a}}{1-a} + \zeta(a) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^a} - \sum_{k=1}^{N} B_{2k} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2k-2)}{(2k)! \cdot n^{a-1+2k}}$$
$$+ \int_0^1 \frac{B_{2N+1}(u)}{(2N+1)!} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2N)}{(u+m)^{a+1+2N}}\,du$$

1. on peut aussi s'occuper des $a \leq 0$ en ayant fait d'abord des intégrations par parties supplémentaires dans 12.

Elle sert de développement asymptotique pour $n \to \infty$, l'intégrale étant négligeable devant le dernier terme de la somme finie.

La version de 11 qui vaut pour $a = 1$ est

$$\log n = S_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(u+k)^2}\, du \tag{15}$$

Donc il existe $\gamma = \lim(S_n - \log n)$ et

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(u+k)^2}\, du \tag{16}$$

On combine cette équation à la précédente, et cela donne :

$$S_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + \int_0^1 C_1(u) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(u+k)^2}\, du \tag{17}$$

Ainsi

Théorème 4. *On a formule exacte :*

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{N} \frac{B_{2k}}{2k \cdot n^{2k}} + \int_0^1 B_{2N+1}(u) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(u+m)^{2+2N}}\, du$$

Le reste intégral est (pour N fixé) un «petit o» du dernier terme de la somme finie qui sert donc de développement asymptotique à $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Terminons cette section en comparant 14 et 17 via le passage à la limite pour $a \to 1$. On obtient : $\frac{n^{1-a}}{1-a} + \zeta(a) = \log n + \gamma + o_{a\to 1}(1)$ et donc :

$$\zeta(a) = \frac{1}{a-1} + \gamma + o_{a\to 1}(1)$$

4 Formule de Stirling

Pris par mon élan, j'ajoute une discussion de ce thème hyper classique. Posons maintenant

$$S_n = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$$

On imite la méthode qui nous a si bien réussi, avec comme point de départ à nouveau «la formule intégrale d'Euler-MacLaurin à l'ordre 1» : ($C_1(t) = t - \frac{1}{2}$)

$$\int_k^{k+1} \log(t) dt = \frac{1}{2}(\log k + \log(k+1)) - \int_0^1 C_1(t) \frac{dt}{k+t} \tag{18}$$

Ici, on va intégrer par parties tout de suite, car sinon la série obtenue en sommant sous l'intégrale ne serait pas convergente.

$$\int_k^{k+1} \log(t)dt = \frac{\log k + \log(k+1)}{2} - C_2\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) - \int_0^1 C_2(t)\frac{dt}{(k+t)^2}$$

Je rappelle nos notations : $C_2 = \frac{1}{2}B_2 = \frac{1}{12}$ et $C_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - t + \frac{1}{6})$. Ce n'est pas indispensable, mais je fais d'office une nouvelle intégration par parties :

$$\int_k^{k+1} \log(t)dt = \frac{\log k + \log(k+1)}{2} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) - 2\int_0^1 C_3(t)\frac{dt}{(k+t)^3}$$

Maintenant, sommons de 1 à $n-1$:

$$\int_1^n \log(t)\,dt = S_n - \frac{1}{2}\log(n) - \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - 1) - 2\int_0^1 C_3(t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+t)^3}\,dt$$

On le met sous la forme :

$$S_n = (n+\frac{1}{2})\log(n) - n + \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \int_0^1 C_3(t)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(k+t)^3}\,dt \tag{19}$$

On en déduit l'existence de

$$A = \lim\left(S_n - (n+\frac{1}{2})\log(n) + n\right) = \frac{11}{12} + \int_0^1 C_3(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+t)^3}\,dt \tag{20}$$

et finalement, on a :

$$S_n = (n+\frac{1}{2})\log(n) - n + A + \frac{1}{12n} - \int_0^1 C_3(t)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2}{(k+t)^3}\,dt \tag{21}$$

Il ne reste plus qu'à faire charger la cavalerie avec $f(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2}{(k+t)^3}$:

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 C_3(t)f(t)\,dt &= [-C_4(t)f(t)]_0^1 + \int_0^1 C_4(t)f'(t)\,dt = C_4(f(0)-f(1)) + \int_0^1 C_4(t)f'(t)\,dt \\
&= C_4(f(0)-f(1)) - \int_0^1 C_5(t)f''(t)\,dt \\
&= C_4(f(0)-f(1)) + C_6(f''(0)-f''(1)) - \int_0^1 C_7(t)f^{(4)}(t)\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{N} C_{2k+2}(f^{(2k-2)}(0) - f^{(2k-2)}(1)) - \int_0^1 C_{2N+3}(t)f^{(2N)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

$$f^{(2N)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdots(2+2N)}{(k+t)^{3+2N}}$$

$$f^{(2k-2)}(0) - f^{(2k-2)}(1) = \frac{(2k)!}{n^{1+2k}}$$

Ainsi :

Théorème 5. *On a la formule exacte :*

$$\log n! = (n+\frac{1}{2})\log(n)-n+A+\frac{1}{12n}+\sum_{k=1}^{N}\frac{B_{2k+2}}{(2k+2)(2k+1)}\frac{1}{n^{2k+1}}-\int_0^1\frac{B_{2N+3}(t)}{2N+3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+t)^{2N+3}}\,dt$$

Le reste intégral est (pour N fixé) un «petit o» du dernier terme de la somme finie qui sert donc de développement asymptotique à $S_n = \log n!$.

Compte tenu de $B_4 = \frac{-1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = \frac{-1}{30}$, le début du développement asymptotique est donc :

$$S_n = (n+\frac{1}{2})\log(n) - n + A + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360\cdot n^3} + \frac{1}{1260\cdot n^5} - \frac{1}{1680\cdot n^7} + \dots$$

En particulier $n! \sim e^A\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$. La valeur exacte de A doit s'acquérir par une autre méthode. Classiquement on utilise le produit infini de Wallis

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{1.3}{2.2}\frac{3.5}{4.4}\cdots\frac{(2m-1).(2m+1)}{(2m).(2m)} = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)$$

dont on peut déduire l'équivalent :

$$\binom{2n}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

On a : $(2n)! \sim e^A\sqrt{2n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}$ et $n! \sim e^A\sqrt{n}n^ne^{-n}$ donc

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim e^{-A}\sqrt{\frac{2}{n}}2^{2n}$$

La comparaison donne : $e^A = \sqrt{2\pi}$.

Le produit infini de Wallis est un cas particulier de la formule d'Euler :

$$\sin(x) = x\prod_{m=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2})$$

5 Stirling plus élémentairement

On peut aussi vouloir comprendre

$$S_n = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$$

le plus élémentairement possible. La fonction logarithme tend vers l'infini, mais très lentement, on peut donc penser que dans la somme S_n qui comporte n termes, la valeur moyenne des termes n'est pas beaucoup plus faible que le plus grand d'entre eux, et donc on veut comparer S_n à $n\log(n)$. Posons alors

$$v_n = n\log n - (n-1)\log(n-1)$$

de sorte que $v_2 + \cdots + v_n = n\log n$.

$$\begin{aligned} v_k &= \log k - (k-1)(\log(k-1) - \log(k)) = \log k - (k-1)\log(1-\frac{1}{k}) \\ &= \log k + k(1-\frac{1}{k})(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^3})) = \log k + (1-\frac{1}{k})(1+\frac{1}{2k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})) \\ &= \log k + 1 - \frac{1}{2k} + \mathcal{O}(k^{-2}) \end{aligned}$$

Par conséquent la série de terme général (pour $k \geq 2$) : $u_k = v_k - \log k - 1 + \frac{1}{2k}$ est convergente. Pour éviter d'avoir à évaluer $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, on va plutôt travailler avec la série de terme général $t_k = v_k - \log k - 1 - \frac{1}{2}\log(\frac{k-1}{k})$ qui ne diffère de u_k que par un $\mathcal{O}(k^{-2})$. La série $\sum_{k\geq 2} t_k$ converge et ses sommes partielles valent

$$\sum_{k=2}^{n} t_k = n\log n - S_n - (n-1) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{n}$$

En posant $L = \sum_{k=2}^{\infty} t_k$ on a donc à ce stade :

$$S_n = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + 1 - L + \sum_{k=n+1}^{\infty} t_k$$

Écrivons à nouveau la valeur de t_k :

$$\begin{aligned} t_k &= (k-1)\log\frac{k}{k-1} - 1 - \frac{1}{2}\log(\frac{k-1}{k}) = (1-\frac{1}{k})\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)k^j} - 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{jk^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j} + \frac{1}{2j})\frac{1}{k^j} = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{j-1}{2j(j+1)}\frac{1}{k^j} = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{12k^3} + \frac{3}{40k^4} + \mathcal{O}(k^{-5}) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k-1)} &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \mathcal{O}(k^{-5}) \\ t_k &= \frac{1}{12}\frac{1}{k(k-1)} + \left(\frac{3}{40} - \frac{1}{12}\right)\frac{1}{k^4} + \mathcal{O}(k^{-5}) \\ \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} t_k &= \frac{1}{12n} - \frac{1}{120}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4}) = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4}) \end{aligned}$$

Par conséquent, avec $A = 1 - L$:

$$n! = e^A\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n \exp(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})) \tag{22}$$