Décomposition en « éléments simples » des nombres rationnels

Jean-François Burnol, 14 octobre 2010

Soit $\mathcal{P} \subset N$ l'ensemble des nombres premiers.

Définition 1. *On appellera « élément simple » tout nombre rationnel qui est, soit un nombre entier relatif, soit un nombre de la forme* $\frac{a}{p^l}$, $l \geq 1$, $0 \leq a < p$, *avec* $p \in \mathcal{P}$.

Théorème 1. *Tout nombre rationnel non nul s'écrit de manière unique (à l'ordre des termes près) comme une somme d'éléments simples non nuls.*

Existence. Soit p_1, …, p_k des nombres premiers distincts, e_1, …, e_k des entiers au moins égaux à 1, et $q_j = \prod_{i \neq j} p_i^{e_i}$ pour $1 \leq j \leq k$. Aucun nombre premier ne divise tous les q_j, donc ils sont premiers entre eux dans leur ensemble et il existe une identité de Bezout :

$$1 = u_1 q_1 + \cdots + u_k q_k \tag{1}$$

Par conséquent, avec $N = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$:

$$\frac{1}{N} = \frac{u_1}{p_1^{e_1}} + \cdots + \frac{u_k}{p_k^{e_k}} \tag{2}$$

Soit maintenant $q = \frac{a}{b}$, $b > 0$, un nombre rationnel non nul. Si $b = 1$, $q = a$ est un élément simple. Si $b > 1$, on applique ce qui précède à $N = b$, et on en déduit :[1]

$$q = \frac{au_1}{p_1^{e_1}} + \cdots + \frac{au_k}{p_k^{e_k}} \tag{3}$$

On fait maintenant la division euclidienne de au_j par $p_j^{e_j}$, $au_j = n_j p_j^{e_j} + r_j$, $0 \leq r_j < p_j^{e_j}$. En posant $n = n_1 + \cdots + n_k$ on obtient

$$q = n + \frac{r_1}{p_1^{e_1}} + \cdots + \frac{r_k}{p_k^{e_k}} \tag{4}$$

On fait ensuite pour chaque r_j la division en puissances croissantes par p_j (autrement dit on écrit l'entier r_j en base p_j), et cela donne les éléments simples recherchés. Bien sûr si n ou l'une des fractions simples obtenues est nul[2] on le[3] retire de la liste. $\square$

Unicité. Supposons que l'on ait deux écritures :

$$q = \alpha + \frac{r_1}{p_1^{e_1}} + \cdots + \frac{r_k}{p_k^{e_k}} \tag{5}$$

$$q = \beta + \frac{s_1}{q_1^{f_1}} + \cdots + \frac{s_n}{q_n^{f_n}} \tag{6}$$

1. j'avais aussi expliqué comment faire en procédant avec des identités de Bezout à deux termes.
2. épineux problème d'accord en genre et nombre.
3. idem

avec $0 \leq r_j < p_j^{e_j}$, $0 \leq s_i < q_i^{f_i}$. Tout d'abord en assemblant les nombres premiers p_i et q_j dans une même liste $P_1 < \cdots < P_N$, et en prenant comme exposant E_n associé au nombre premier P_n le maximum de e_j et f_i si $P_n = p_j = q_i$, ou l'unique e_j ou l'unique f_i, si P_n n'est que dans une des deux listes initiales, alors cela donne deux égalités :

$$q = \alpha + \frac{a_1}{P_1^{E_1}} + \cdots + \frac{a_N}{P_N^{E_N}} \tag{7}$$

$$q = \beta + \frac{b_1}{P_1^{E_1}} + \cdots + \frac{b_N}{P_N^{E_N}} \tag{8}$$

Dans ces écritures certains des a_n ou b_n peuvent être nuls. En tout cas on a toujours $0 \leq a_n, b_n < P_n^{E_n}$. Soit $Q_1 = P_2^{E_2} \cdots P_N^{E_N}$. En multipliant la première équation (resp. la deuxième) par $C = P_1^{E_1} P_2^{E_2} \cdots P_N^{E_N}$, on obtient que Cq est un nombre entier et que de plus

$$Cq \equiv Q_1 a_1 \equiv Q_1 b_1 \mod P_1^{E_1} \tag{9}$$

Mais Q_1 est premier à P_1, donc

$$a_1 \equiv b_1 \mod P_1^{E_1} \tag{10}$$

Donc

$$a_1 = b_1 \tag{11}$$

car ils sont tous deux entre 0 et $P_1^{E_1} - 1$. Ainsi, a_1 et de même $a_2, \ldots, a_N$, sont uniquement déterminés. Et par conséquent aussi $\alpha = \beta$. Finalement on invoque l'unicité des chiffres de l'écriture d'un nombre en base P_n pour avoir l'unicité des éléments simples entrant dans une écriture de q. $\square$

Notons qu'il y a une très forte analogie avec les anneaux de polynômes $K[X]$ et que la preuve dans $K[X]$ peut se faire de manière quasi-identique.

Attention : ne pas croire que si $q > 0$, alors le n est aussi > 0 ou même ≥ 0 !

Le calcul concret peut se mener de multiples manières mais quelle que soit la méthode, à un moment ou un autre, ce qu'il faut savoir faire ou ce qui est obtenu équivaut à savoir calculer l'inverse d'une classe de congruence (comme par exemple on sait faire via une identité de Bezout).

Quelques exemples :

$$\frac{1}{231} = \frac{1}{3.7.11} = \frac{1}{11}(\frac{1}{3} - \frac{2}{7}) = \frac{4}{11} - \frac{1}{3} - 2(\frac{2}{7} - \frac{3}{11}) = -2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{7} + \frac{10}{11}$$

$$\frac{1}{230} = \frac{1}{2.5.23} = \frac{1}{23}(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}) = \frac{1}{2} - \frac{11}{23} - 2(\frac{2}{5} - \frac{9}{23}) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{23} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{232} = \frac{1}{8.29} = \frac{1}{3}\frac{32-29}{8.29} = \frac{4}{3.29} - \frac{1}{3.8} = 4\frac{30-29}{3.29} - (\frac{3}{8} - \frac{1}{3}) = \frac{40}{29} - \frac{4}{3} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = -1 + \frac{11}{29} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Et $\frac{499}{1001} = n + \frac{a}{7} + \frac{b}{11} + \frac{c}{13}$ avec $499 \equiv 2 \equiv 143a \equiv 3a \mod 7$, $a = 3$, $499 \equiv 91b \mod 11$, $b = 5$, $499 \equiv 77c \mod 13$, $c = 8$. Et $n = -1$.

$$\frac{499}{1001} = -1 + \frac{3}{7} + \frac{5}{11} + \frac{8}{13}$$