Un théorème d'existence de dérivées

Jean-François Burnol, 20 septembre 2009

Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I, a un point de I et $n \geq 1$ un entier. On suppose que $f^{(n)}(a)$ existe. Définissons :

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

Théorème 1 *La fonction k admet une dérivée $(n-1)^e$ au point a qui vaut :*

$$k^{(n-1)}(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n}$$

Corollaire 1 *On suppose f infiniment dérivable au point a. Alors $k(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ prolongée par continuité est infiniment dérivable au point a et $k^{(j)}(a) = \frac{f^{(j+1)}(a)}{j+1}$ pour $j \in \mathbf{N}$.*

Corollaire 2 *On suppose que f est de classe C^∞ sur un intervalle I contenant a. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est de classe C^∞ sur I, y-compris en a (après prolongement par continuité).*

Corollaire 3 *On suppose que f est de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0 et que $f(0) = 0$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ est de classe C^∞ sur I y-compris en 0.*

Note 1 : le premier corollaire est plus fort que le suivant, car rien n'y dit que l'on pourrait trouver un même voisinage de a sur lequel toutes les dérivées de f existent...

Note 2 : les deux derniers corollaires sont équivalents et se prouvent habituellement, disons pour le cas $f(0) = 0$, via la représentation intégrale $\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(xt)\,dt$ et les théorèmes de dérivation d'intégrales à paramètre.

Corollaire 4 (Formule de Taylor-Young) *On a :*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!} + o((x-a)^n)$$

Preuve du corollaire : pour $n = 1$ c'est une reformulation de la définition de la dérivée. Pour $n \geq 2$ on peut appliquer par récurrence le cas $n-1$ à la fonction k, et compte tenu de $k^{(j)}(a) = \frac{f^{(j+1)}(a)}{j+1}$ pour $j < n$, cela donne :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(a)}{j+1} \frac{(x-a)^j}{j!} + o((x-a)^{n-1})$$

D'où Taylor-Young à l'ordre n pour f ! Cependant comme la preuve du Théorème 1 est plutôt plus complexe que les preuves usuelles de la formule de Taylor-Young, je ne prétends pas déclencher l'enthousiasme (d'autant que plus qu'on ne peut pas déduire, en tout cas je ne le vois pas immédiatement, Taylor-Lagrange ou Taylor-Laplace du Théorème 1).

Venons-en à la preuve du Théorème. Il n'y a rien de particulier à montrer pour $n = 1$. Supposons $n \geq 2$. On se place dans un voisinage de a sur lequel f est $n-1$ fois dérivable. Je prétends que pour $0 \leq j \leq n-1$ on a la formule suivante pour $x \neq a$:[1]

$$k^{(j)}(x) = j! \frac{f(a) - \sum_{l=0}^{j} \frac{(a-x)^l}{l!} f^{(l)}(x)}{(a-x)^{j+1}}$$

Pour $j = 0$ c'est la définition de k. Notons :

$$Q_j(x) = f(a) - \sum_{l=0}^{j} \frac{(a-x)^l}{l!} f^{(l)}(x)$$

On calcule, pour $j \leq n-2$:

$$Q'_j(x) = -\sum_{l=0}^{j} \frac{(a-x)^l}{l!} f^{(l+1)}(x) + \sum_{l=1}^{j} \frac{(a-x)^{l-1}}{(l-1)!} f^{(l)}(x) = -\frac{(a-x)^j}{j!} f^{(j+1)}(x)$$

Donc de l'hypothèse de récurrence $k^{(j)}(x) = j! \frac{Q_j(x)}{(a-x)^{j+1}}$ il résulte :

$$k^{(j+1)}(x) = j! \frac{Q'_j(x)(a-x) + Q_j(x)(j+1)}{(a-x)^{j+2}} = (j+1)! \frac{f(a) - \sum_{l=0}^{j} \frac{(a-x)^l}{l!} f^{(l)}(x) - \frac{(a-x)^{j+1}}{(j+1)!} f^{(j+1)}(x)}{(a-x)^{j+2}}$$

ce qui est exactement $k^{(j+1)}(x) = (j+1)! \frac{Q_{j+1}(x)}{(a-x)^{j+2}}$.

Nous allons maintenant montrer l'existence et calculer $k_j = \lim_{x \to a} k^{(j)}(x)$ pour $0 \leq j \leq n-2$. Nous appliquons la **Règle de L'Hospital** :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} j! \frac{Q_j(x)}{(a-x)^{j+1}} &= \lim_{x \to a} j! \frac{-Q'_j(x)}{(j+1)(a-x)^j} \\ &= \lim_{x \to a} j! \frac{(a-x)^j f^{(j+1)}(x)}{j!(j+1)(a-x)^j} = \frac{f^{(j+1)}(a)}{j+1} \end{aligned}$$

Ainsi k_0, k_1, ..., k_{n-2} existent et cela entraîne par un théorème connu que k est $(n-2)$-fois dérivable au point a avec $k^{(j)}(a) = k_j = \frac{f^{(j+1)}(a)}{j+1}$. Nous examinons alors le quotient différentiel :

$$\frac{k^{(n-2)}(x) - k_{n-2}}{x-a} = (n-2)! \frac{f(a) - \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(a-x)^l}{l!} f^{(l)}(x) - \frac{f^{(n-1)}(a)}{n-1} \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-2)!}}{-(a-x)^n}$$

À nouveau par la **Règle de L'Hospital** :

$$\lim_{x \to a} \frac{k^{(n-2)}(x) - k_{n-2}}{x-a} = (n-2)! \lim_{x \to a} \frac{-\frac{(a-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(a) \frac{(a-x)^{n-2}}{(n-2)!}}{n(a-x)^{n-1}}$$

Ceci est justifié car à droite de l'égalité on a a effectivement une limite, qui n'est autre que $\frac{f^{(n)}(a)}{n}$. Donc $k^{(n-1)}(a)$ existe et vaut $\frac{f^{(n)}(a)}{n}$. CQFD.

1. cette formule ne tombe pas du ciel, on calcule k' puis k'' et on en infère de suite la règle générale ; à noter l'apparition amusante des polynômes de Taylor, centrés en x pas en a.