Continuité et dérivabilité en un point et fonction réciproque

J.-F. B. 11 janvier 2012

I

Question : *Soit* $f : I \to J$ *une application bijective entre deux intervalles* I *et* J *qui est continue* **au point** $a \in I$. *Est-il nécessairement vrai que* f^{-1} *est continue au point* $y = f(a)$ *?*
Réponse : $\boxed{\text{NON.}}$ Je donne un exemple un peu compliqué, on peut sûrement faire plus simple je n'y réfléchis pas.

Soit $I =]-1, 2[$. La fonction f est définie par la recette suivante :

1. si $1 \leqslant x < 2$ alors $f(x) = x - 2$.
2. si $n \geqslant 1$ et $2^{-n} \leqslant x < 2 \cdot 2^{-n}$ alors $f(x) = 2^{-n}x$.
3. si $n \geqslant 1$ et $2^{-n} \leqslant -x < 2 \cdot 2^{-n}$ alors $f(x) = 2 \cdot 2^{-n}|x|$.
4. si $x = 0$, alors $f(x) = 0$.

Si je ne me suis pas trompé f est bijective de I sur $[-1, 1[$. De plus f est continue en zéro puisque $0 \leqslant f(x) \leqslant |x|$ pour $-1 < x < 1$. Cependant f^{-1} n'est pas continue en $y = f(0) = 0$. Car sa limite à droite vaut certes 0 mais sa limite à gauche vaut 2.

En fait, on a même $0 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2$ pour $-1 < x < 1$ donc $f'(0)$ existe, et vaut zéro.

II

Théorème. *Soit* $f : I \to J$ *bijective, et dérivable* **au point** a. *Si* f^{-1} *est continue au point* $y = f(a)$, *et si* $f'(a) \neq 0$ *alors* f^{-1} *est dérivable au point* $y = f(a)$ *et sa dérivée est* $f'(a)^{-1}$.

Preuve. Soit y_n une suite dans $J \setminus \{y\}$ de limite y, et $x_n = f^{-1}(y_n)$ donc par hypothèse $x_n \to a$. On a :

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \tag{1}$$

Le terme de droite tend vers $f'(a)^{-1}$ puisque $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$ tend vers $f'(a) \neq 0$ puisque x_n tend vers a et que f est dérivable au point a. □

III

Voici un exemple qui montre que la continuité de f^{-1} au point $y = f(a)$ n'est pas garantie par les autres hypothèses du Théorème précédent.

Soit $n \geqslant 1$. Alors $2^{-n} + 8^{-n} < 2 \cdot 2^{-n}$. Je pose $f(x) = 2^{-n} + 8^{-n} + (x - 2^{-n})(1 - 4^{-n})$ pour $2^{-n} \leqslant x < 2 \cdot 2^{-n}$. Autrement dit elle est affine sur cet intervalle avec $f(x) = x + x^3$ à l'extrémité gauche et $\lim f(x) = x$ à l'extrémité droite (qui n'est pas dans l'intervalle). On a $x \leqslant f(x) \leqslant x + x^3$ pour tout x de cet intervalle (vérifiez). Je définis ainsi f sur $]0, 1[= \cup_{n \geqslant 1}[2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}[$, puis $f(0) = 0$ et enfin $f(-x) = -f(x)$ pour $-1 < x < 0$. Comme $|f(x) - x| \leqslant |x|^3$, la fonction f est dérivable au point 0. Bien sûr pour l'instant ce n'est pas une bijection avec image un intervalle, c'est juste une injection avec image une union d'intervalles disjoints (dont le singleton $\{0\}$).

Les « trous », pour $x > 0$, sont les intervalles $[2^{-n}, 2^{-n} + 8^{-n}[$ pour $n \geqslant 1$. Je définis donc f sur $[1 + 2^{-n}, 1 + 2 \cdot 2^{-n}[$ comme valant $f(x) = 2^{-n} + 4^{-n}(x - 1 - 2^{-n})$ de manière à combler exactement ce trou. Finalement je pose $f(1) = 1$. Et supra finalement je définis aussi f sur $]-2, -1]$ de sorte que $f(-x) = -x$.

Sauf erreur j'ai construit une bijection f de $]-2, +2[$ sur $[-1, +1]$, avec $f'(0) = 1$. Cependant f^{-1} n'est pas dérivable en $y = f(0)$ car elle n'y est même pas continue.

Autrement dit, comme d'habitude, j'avais tout bon cet après-midi

La leçon de tout cela (que l'on retrouve implicitement dans des théorèmes comme celui de l'inversion locale), c'est que pour avoir une situation agréable en ce qui concerne les propriétés de la fonction réciproque f^{-1} on a intérêt à supposer f continue sur tout un intervalle. La continuité (globale) de la réciproque d'une bijection globalement continue d'un intervalle vers un autre est donc un Théorème extrêmement utile. Une fois la continuité de la réciproque acquise, on peut se contenter de la dérivabilité ponctuelle de la fonction f.

Dans l'inversion locale, on exploite la dérivabilité sur tout un voisinage pour établir qu'il est effectivement possible, *localement*, d'inverser la fonction : en une dimension, le fait que la dérivée f' ne s'annule pas sur un voisinage de a implique qu'elle conserve un signe constant (lemme de Darboux), donc que f est strictement monotone (par le T.A.F.), puis admet localement une réciproque continue par la combinaison du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème extrêmement utile, et cette réciproque est dérivable par notre Théorème. En dimension supérieure, c'est plus difficile, mais en tout cas on comprend pourquoi on fait une hypothèse sur la dérivée (le Jacobien) non seulement au point a mais *en tous les points d'un voisinage*.