Quelques aspects de la convexité

Jean-François Burnol, 9 octobre 2011

Tenant compte du très bon exposé de l'autre jour, je voudrais ici juste apporter quelques variantes et compléments. Il y en a pour plusieurs pages, le sujet de la convexité est vraiment vaste. Chaque présentation devra faire ses choix et décider s'il y a ici quelque chose de valable à retenir (je ne donne pas mon avis, car je ne suis pas impartial).

1 Que d'inégalités !

Supposons donc que y est un barycentre (à coefficients positifs) de x et z :

$$y = tx + (1 - t)z \qquad \text{donc } t = \frac{z-y}{z-x}, \text{ ou encore } 1 - t = \frac{y-x}{z-x}$$

Je sais que d'habitude on regarde des barycentres de x et de y, mais j'étais gêné d'écrire $x < z < y$ je préfère $x < y < z$, donc c'est y que je vois entre x et z. La convexité, c'est

$$\begin{aligned} f(y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(z) &= f(z) - \frac{z-y}{z-x}(f(z) - f(x)) \\ &= f(x) + \frac{y-x}{z-x}(f(z) - f(x)) \end{aligned}$$

et elle peut donc se tester en vérifiant, ou bien

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$\text{ou encore} \qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

La première inégalité dit que le taux d'accroissement $\Delta(x, z) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ sur le domaine $z > x$ est une fonction croissante de x à z fixé et la deuxième que c'est une fonction croissante de z à x fixé : bizarrement demander l'un est donc équivalent à demander l'autre ! De plus, la conséquence

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

apparaît, et de elle aussi on revient à la majoration $f(y) \leqslant \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z)$!

On dit souvent que la convexité signifie que le graphe est **en-dessous** de la corde : certes mais il est parfois utile d'utiliser que le graphe est **au-dessus** des prolongements à gauche et à droite de la corde ! En effet écrire comme ci-dessus

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

lorsque $x < y < z$, c'est demander que le point $(z, f(z))$ est **au-dessus** de la droite passant par $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ et c'est aussi demander que le point $(x, f(x))$ est **au-dessus** de la droite passant par $(y, f(y))$ et $(z, f(z))$.

Exemple : *on demande de montrer que toute fonction convexe* f *sur* $]0, 1[$ *est minorée.*Eh bien, $(x, f(x))$ est **au-dessus** de la droite passant par $(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ et $(\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}))$, lorsque $x < \frac{1}{4}$ ou $x > \frac{3}{4}$. Et sur le segment $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, f étant continue est minorée. Donc f est minorée.

Ça peut intriguer d'avoir toutes ces diverses inégalités qui au final sont équivalentes, et en effet je peux en proposer une autre, plus jolie et symétrique, et dans laquelle on ne suppose plus $x < y < z$:

$$(x-y)(y-z)(z-x) < 0 \implies \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

Je suppose qu'elle peut être utile dans certains contextes. Si $z > x$, $(x-y)(y-z) < 0$ n'est réalisé que pour $x < y < z$ et en calculant le déterminant par exemple sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix} \geqslant 0, \text{soit aussi } \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

on retrouve l'une de nos inégalités. La convexité est donc équivalente à la positivité du déterminant pour les $x \leqslant y \leqslant z$, puisqu'il s'annule automatiquement en cas d'égalité de deux parmi les trois.

Si par contre $z < x$, la première inégalité signifie que soit $y < z$ soit $y > x$. Si $y < z < x$, on écrit $X = y$, $Y = z$, $Z = x$, ce qui nous ramène à $X < Y < Z$ et le déterminant avec X, Y, Z est égal à celui avec x, y, z ! (deux permutations de lignes !) De même si $z < x < y$ on écrit $X = z$, $Y = x$, $Z = y$, et idem ! Donc, en cas de convexité, le déterminant sera positif dès que $(x-y)(y-z)(z-x) \leqslant 0$.

Supposons maintenant que $(x-y)(y-z)(z-x) > 0$, si je pose $X = y$, $Y = x$ et $Z = z$, j'ai $(X-Y)(Y-Z)(Z-X) < 0$ et le déterminant avec X, Y, Z est $\geqslant 0$ donc celui avec x, y, z est $\leqslant 0$. On peut ainsi encapsuler la convexité dans le **critère**

équivalent suivant, pour lequel on n'a pas à se préoccuper des positions relatives de x, y, z :

$$\forall x, y, z, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-y)(z-x) \text{ sont du même signe.}$$

Si l'on veut établir la convexité, il suffira cependant comme on l'a vu de montrer que le déterminant est positif (ou nul) lorsque $x < y < z$.

2 Convexité et dérivées (1)

On sait que, si f est deux fois dérivable, la convexité équivaut à $f'' \geqslant 0$. Vérifions-le par différentes méthodes, d'abord pour montrer que la condition est suffisante. Il s'agit donc par exemple de vérifier :

$$f'' \geqslant 0 \implies \left(x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \right)$$

Par le TAF $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(a)$ pour $x < a < y$ et $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(b)$ pour $y < b < z$. Or f' est croissante et par conséquent $f'(a) \leqslant f'(b)$: la convexité est prouvée.

On va maintenant le refaire mais par le biais d'une estimation quantitative de

$$f(y) - t\,f(x) - (1 - t)\,f(z)$$

lorsque $y = tx + (1 - t)z$, $t = \frac{z-y}{z-x}$, $1 - t = \frac{y-x}{z-x}$. On combine :

$$f(x) = f(y) + \int_y^x f'(w)dw = f(y) + (x - y) \int_0^1 f'(y + u(x - y))\,du$$

$$f(z) = f(y) + \int_y^z f'(w)dw = f(y) + (z - y) \int_0^1 f'(y + u(z - y))\,du$$

$$(z - y)f(x) + (y - x)f(z) = (z - x)f(y) + (z - y)(y - x) \int_0^1 (f'(y + u(z - y)) - f'(y + u(x - y))\,du$$

$$f(y) - tf(x) - (1 - t)f(z) = -(z - y)(y - x) \int_0^1 \frac{f'(y + u(z - y)) - f'(y + u(x - y))}{z - x}\,du$$

En appliquant le Théorème de la moyenne à l'intégrale (la fonction f' est continue), puis le Théorème des accroissements finis, il vient, pour toute fonction deux fois dérivable et $x < y < z$:

$$\exists u \in]0, 1[\ \exists \xi \in]x, z[\qquad f(y) - tf(x) - (1 - t)f(z) = -(z - y)(y - x)uf''(\xi)$$

Cette estimation quantitative confirme que $f'' \geqslant 0$ implique la convexité de f. Elle est aussi utilisable pour majorer l'écart entre $(y, f(y))$ et la corde. Mais elle n'est pas efficiente pour prendre la limite $x \to y$, $z \to y$, ainsi si par exemple $x = y - h$, $z = y + h$, que vaut :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{2f(y) - f(y-h) - f(y+h)}{h^2} \quad ?$$

Comme on sait seulement $0 < u < 1$, même en supposant f de classe C^2 on n'arrive pas à conclure sur l'existence ou non d'une limite.

Et en effet notre formule est naïve et peut être améliorée. Écrivons l'intégrale plutôt sous la forme :

$$\int_0^1 \frac{f'(y + u(z-y)) - f'(y + u(x-y))}{u(z-x)}\, u du$$

La fraction est une fonction continue de $u > 0$ (comme on suppose que f'' existe, alors f' est certainement continue) qui, lorsque $u \to 0^+$, a une limite finie :

$$\frac{f'(y + u(z-y)) - f'(y + u(x-y))}{u} = \frac{f'(y + u(z-y)) - f'(y)}{u} + \frac{f'(y) - f'(y + u(x-y))}{u}$$
$$\to (z-y)f''(y) - (x-y)f''(y) = (z-x)f''(y)$$

On considère donc la fraction prolongée par continuité et on lui applique la formule de la moyenne, par rapport à la mesure positive $u du$, ce qui donne

$$\frac{f'(y + v(z-y)) - f'(y + v(x-y))}{v(z-x)} \cdot \int_0^1 u\, du$$

pour un certain $v \in]0, 1[$. Par le TAF pour f', nous obtenons finalement une sorte de Formule de Taylor-Lagrange adaptée aux études de la convexité :

Théorème 1. *Pour toute fonction deux fois dérivable* f *:*

$$x < y < z, \qquad y = t\,x + (1-t)z, \quad (0 < t < 1),$$
$$\Longrightarrow \quad \exists \xi \in]x, z[\qquad f(y) - t\,f(x) - (1-t)\,f(z) = -(z-y)(y-x)\frac{1}{2}f''(\xi)$$

Ceci donne à nouveau l'implication $f'' \geqslant 0 \implies$ f convexe. Si f'' est continue au point y (considéré fixe), on obtient de plus :

$$\lim_{z-x\to 0, x<y<z} \frac{f(y) - tf(x) - (1-t)f(z)}{(z-y)(y-x)} = -\frac{1}{2}f''(y)$$

Dans cette formule, t est celui qui fait $y = tx + (1 - t)z$. Quelques exemples où ce t a priori variable a été pris fixe :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{2f(y) - f(y-h) - f(y+h)}{h^2} = -f''(y)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{3f(y) - 2f(y-h) - f(y+2h)}{h^2} = -3f''(y)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{8f(y) - 3f(y-5h) - 5f(y+3h)}{h^2} = -60f''(y)$$

En fait, ces limites sont vraies, en supposant seulement l'existence de $f''(y)$. Prouvons par exemple la dernière. On est dans un cas $\frac{0}{0}$, et on applique la Règle de L'Hospital, ce qui amène à examiner

$$\begin{aligned}\frac{15f'(y-5h) - 15f'(y+3h)}{2h} &= 15\frac{f'(y-5h) - f'(y)}{2h} + 15\frac{f'(y) - f'(y+3h)}{2h} \\ &\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{75}{2}f''(y) - \frac{45}{2}f''(y) = -60\, f''(y)\end{aligned}$$

Ainsi, si la fonction f est convexe, alors $f''(y) \geqslant 0$ en tout point y où f est deux fois dérivable, il n'y a pas besoin que f'' existe pour les points voisins de y (notre démonstration suppose y point intérieur de l'intervalle I, mais avec $f(y) - 2f(y+h) + f(y+2h)$ pour l'extrémité gauche, ou $f(y) - 2f(y-h) + f(y-2h)$ pour l'extrémité droite on aboutit à la même conclusion par une preuve analogue).

3 Convexité et dérivées (2)

J'en reviens au taux d'accroissement $\Delta(x, z) = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ pour un aspect rarement cité de la convexité et potentiellement utile. Dans un premier temps $x \neq z$. Je répète les choses bien connues : la majoration $x < z < w \implies \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ montre que la fonction croissante de $x < z$, $x \mapsto \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ est majorée lorsque x tend vers z par valeurs inférieures (attention, ici z est un point intérieur de I). Donc on a une dérivée à gauche $f'_g(z)$ et on prouve de même qu'il y a une dérivée à droite $f'_d(z)$. De plus en passant aux limites $x \to z^-$, $w \to z^+$ on a $f'_g(z) \leqslant f'_d(z)$, et on posera donc, lorsque z n'est pas une extrémité de I :

$$\Delta(z, z) = \frac{1}{2}(f'_g(z) + f'_d(z))$$

Avec cette définition (et si I a une ou deux extrémités il faudra éventuellement accepter la valeur $-\infty$ (resp. $+\infty$) pour Δ au point $(\min I, \min I)$ (resp. $(\max I, \max I)$)), Δ est définie sur $I \times I$. On a vu plus haut que si on se déplace horizontalement dans $I \times I$, pour z fixé, $x < z$, donc vers la diagonale, alors Δ est croissante. Mais lorsque l'on franchit la diagonale, par symétrie, c'est comme si on se mettait à partir d'elle à monter vers le haut, et là-aussi on a vu que Δ était croissante. Donc en fait Δ est croissante sur toutes les horizontales (parcourues de la gauche vers la droite), et par un raisonnement identique sur toutes les verticales (du bas vers le haut), dans le « carré » $I \times I$. On a donc la conséquence qui est rarement citée mais qui pourrait être utile :

Théorème 2. *Soit* f *une fonction convexe sur l'intervalle* I*, alors le taux d'accroissement (qui peut valoir* $\pm\infty$ *pour* $x = z$ *une extrémité de* I*)*

$$\Delta(x, z) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \qquad \Delta(x, x) = \frac{f'_g(x) + f'_d(x)}{2}$$

est une fonction croissante du couple (x, z) *:*

$$x \leqslant x', z \leqslant z' \implies \Delta(x, z) \leqslant \Delta(x', z')$$

Celui ou celle qui voudrait présenter cela à l'oral pourra tout aussi bien se restreindre à f dérivable afin de simplifier un peu la discussion de Δ sur la diagonale.

Notez-bien que l'on ne suppose pas $x \leqslant z$ et $x' \leqslant z'$ mais seulement $x \leqslant x'$ et $z \leqslant z'$. Mais en posant $X = \min(x, z)$, $Z = \max(x, z)$, $X' = \min(x', z')$, $Z' = \max(x', z')$, on a $X \leqslant x'$ et $\leqslant z'$, donc $X \leqslant X'$ et $Z' \geqslant x$ et $\geqslant z$ donc $Z' \geqslant Z$. On pourra donc toujours supposer $x \leqslant z$, $x' \leqslant z'$ si l'on veut. Dans le paragraphe qui suit, on n'aura même pas à faire cette réduction en fait.

J'ai en effet envie d'approfondir cette discussion lorsque f est deux fois dérivable : peut-on quantifier la minoration $\Delta(x', z') - \Delta(x, z) \geqslant 0$? oui, car nous allons à nouveau établir une sorte de formule de Taylor-Lagrange « multi-points ». Comme f'' est supposée exister, f' est une fonction continue et :

$$\Delta(x, z) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{\int_x^z f'(w)dw}{z - x} = \int_0^1 f'(x + u(z - x))\, du$$

Cette formule est valable avec $x < z$ comme avec $x > z$, et même pour $x = z$. Dans l'intégrale suivante :

$$\Delta(x', z') - \Delta(x, z) = \int_0^1 (f'(x' + u(z' - x')) - f'(x + u(z - x)))\, du\ ,$$

compte tenu de $x \leqslant x'$, $z \leqslant z'$, on a aussi

$$x + u(z - x) = (1 - u)x + uz \leqslant (1 - u)x' + uz' = x' + u(z' - x')\ ,$$

et il est apparent que l'intégrale est positive si f' est une fonction croissante.

Ne faisons pas de restriction sur f à part l'existence de f'' mais exigeons $(x, z) \neq (x', z')$ de sorte que $x' - x + z' - z > 0$, puis écrivons :

$$\Delta(x', z') - \Delta(x, z) = \int_0^1 \frac{f'(x' + u(z' - x')) - f'(x + u(z - x))}{(1 - u)(x' - x) + u(z' - z)}((1 - u)(x' - x) + u(z' - z))\, du\ ,$$

L'intégrande est continue pour $0 < u < 1$ et même sur $[0, 1]$ si $x' > x$ et $z' > z$, et si $x' = x$ ou $z' = z$ l'intégrande se prolonge par continuité. Donc, par le Théorème de la moyenne par rapport à la mesure positive $((1 - u)(x' - x) + u(z' - z))\, du$:

$$\exists u \in]0, 1[\quad \Delta(x', z') - \Delta(x, z) = \frac{f'(x' + u(z' - x')) - f'(x + u(z - x))}{(1 - u)(x' - x) + u(z' - z)} \frac{x' + z' - x - z}{2}$$

Théorème 3. *Soit une* f *une fonction deux fois dérivable sur un intervalle* I *et* a, b, c, d *dans* I *avec* $a \leqslant c$ *et* $b \leqslant d$ *et* $a + b < c + d$. *Alors :*

$$\exists\, \xi \in]\min(a, b, c, d), \max(a, b, c, d)[:$$
$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{c + d - a - b}{2} f''(\xi)$$

Preuve. Il suffit de poser $x = a$, $z = b$, $x' = c$, $z' = d$ car nos calculs plus haut utilisent seulement $x \leqslant x'$, $z \leqslant z'$, $(x, z) \neq (x', z')$. Puis, dans l'expression intégrale avant l'énoncé du Théorème on invoque le TAF pour f'. Remarquez au passage que le cas $a = b$, $c = d$ n'est pas autre chose que le TAF pour f', que $a = b = c$ et $d > a$ n'est pas autre chose que la formule de Taylor-Lagrange $f(d) = f(a) + (d - a)f'(a) + \frac{1}{2}(d - a)^2 f''(\xi)$ et que $b = a + h$, $c = a + h$, $d = a + 2h$ donne la formule classique utile :

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(\xi) \qquad \square$$

Ce théorème nous explicite de manière très concrète et quantitative le lien entre le signe de la dérivée seconde et les accroissements des taux d'accroissements : si $f'' \geqslant 0$ et si $[a, b]$ a ses extrémités à gauche de celles de $[c, d]$ alors la première corde a une pente moins élevée que la seconde, la différence pouvant être majorée en fonction des valeurs de f'' sur $]a, d[$.

Question : *où est-ce que la démonstration ne fonctionne pas sans les hypothèses* $a \leqslant c$, *et* $b \leqslant d$ *? montrer par un exemple que la condition* $a+b < c+d$ *à elle-seule ne suffit en effet pas.*

À mon avis le Théorème mérite largement sa place dans une leçon sur les fonctions convexes, d'autant plus que sa preuve reste facile, à condition seulement de prendre les bons virages ! Et vous trouverez bien au moins un livre incluant ce résultat, c'est pas possible autrement. De plus ce Théorème a parfaitement sa place comme une originale contribution à la Leçon sur les formules de Taylor, au vu de ses différents cas particuliers.

4 Un exemple

Voici un titre d'exemple un problème maintenant trivial pour nous mais que je vais d'abord analyser plus naïvement.

Supposons que l'on me demande de prouver (ici n est disons un entier au moins 1) :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+4)^3}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+3)^3} - \frac{1}{(n+5)^3}\right)$$

Essayons : le TAF me dit que le terme de gauche est de la forme

$$\frac{3}{x^4}, \quad n < x < n+4$$

et que celui de droite est de la forme :

$$\frac{3}{y^4}, \quad n+3 < y < n+5$$

mais je ne sais pas exclure la possibilité $y < x$ donc impossible de conclure ! Par contre, si je dis que x^{-3} est convexe et que l'inégalité à prouver est

$$-\Delta(n, n+4) \geqslant -\Delta(n+3, n+5)$$

je suis sauvé, puisque $n < n+3$, $n+4 < n+5$. Voilà qui me semble constituer un exercice relativement original !

Dans cet exemple plus haut comment pourrait-on procéder relativement intelligemment si on cherchait à quantifier l'inégalité, mais sans encore connaître le beau Théorème Taylor-Lagrange multipoints de la section précédente ?

Faisons un premier essai en cherchant à prouver plus généralement :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+4h)^3}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+3h)^3} - \frac{1}{(n+5h)^3}\right)$$

Notons g(h) la gauche moins la droite, ainsi $g(0) = 0$, et la dérivée est

$$g'(h) = \frac{3}{(n+4h)^4} + \frac{9}{2(n+3h)^4} - \frac{15}{2(n+5h)^4}$$

et comme par hasard $g'(0) = 0$. En fait, exploitons ce

$$3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

$$g'(h) = 3\left(\frac{1}{(n+4h)^4} - \frac{1}{(n+5h)^4}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{(n+3h)^4} - \frac{1}{(n+5h)^4}\right)$$

Ceci permet de voir que $g'(h)$ est > 0 pour $h > 0$, parce que x^{-4} décroît, c'est-à-dire moralement parce que la fonction x^{-3} est convexe. D'ailleurs par le TAF :

$$g'(h) = 3\left(\frac{4h}{(n+x_1)^5}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{8h}{(n+x_2)^5}\right)$$

avec $4h < x_1 < 5h$, $3h < x_2 < 5h$. Si on écrit alors $g(1) = g'(h)$ pour un certain $0 < h < 1$, on obtient au final

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+4)^3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+3)^3} - \frac{1}{(n+5)^3}\right) = 3\left(\frac{4h}{(n+x_1)^5}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{8h}{(n+x_2)^5}\right)$$

qui est bien > 0 et de plus majoré strictement par $48n^{-5}$. Il y a tout de même un léger malaise car on aurait aimé utiliser la formule de Taylor-Lagrange $g(1) = \frac{1}{2}g''(\xi)$ (puisque $g(0) = g'(0) = 0$) mais ça ne semble pas immédiat que $g''(\xi) > 0$ (faites le calcul !).

Peu-être serait-il plus astucieux de se rappeler qu'on étudie des quotients différentiels de x^{-3} et qu'il s'agit de se déplacer du point $(n, n+4)$ au point $(n+3, n+5)$ dans le carré, ce que l'on peut faire au plus direct en passant par les points intermédiaires $(n+3h, n+4+h)$. Définissons donc :

$$G(h) = -\Delta(n+3h, n+4+h) = (4-2h)^{-1}\left((n+3h)^{-3} - (n+4+h)^{-3}\right)$$

Notre inégalité à prouver est $G(0) \geqslant G(1)$. Pour cela il n'est peut-être pas idiot d'écrire :

$$G(h) = (4-2h)^{-1}\int_{n+3h}^{n+4+h}\frac{3}{x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{3}{(n+3h+(4-2h)u)^4}du$$

Pour l'instant on n'a pas encore vu apparaître la dérivée **seconde** de $x \mapsto x^{-3}$ mais seulement sa dérivée **première**. Mais on va dériver sous le signe somme (et notre changement de variable a été fait pour traiter intelligemment le problème de $(4-2h)^{-1}$) :

$$G'(h) = -\int_0^1 \frac{12(3-2u)}{(n+3h+(4-2h)u)^5}du$$

On a gagné car tout ce qui est sous l'intégrale est > 0.

$$G(0)-G(1) = +\iint_{0<h<1,0<u<1}\frac{12(3-2u)}{(n+3h+(4-2h)u)^5}dhdu$$

J'ai écrit une intégrale double, mais si cela est effrayant il suffit d'une intégrale itérée. Et si cela est encore effrayant on peut utiliser le TAF $G(0)-G(1) = -G'(h)$ pour un certain $0 < h < 1$ puis utiliser dans l'intégrale pour $G'(h)$ le Théorème de la moyenne et cela donne

$$\exists h, u \in]0,1[\qquad G(0)-G(1) = \frac{12(3-2u)}{(n+3h+(4-2h)u)^5}$$

Ainsi

$$0 < G(0)-G(1) < \frac{36}{n^5}$$

et notre majoration est (légèrement) meilleure que la précédente. On peut faire mieux : il faut faire le Théorème de la moyenne par rapport à la mesure positive $(3-2u)du$, cela donne :

$$\exists h, v \in]0,1[\qquad G(0)-G(1) = \frac{12}{(n+3h+(4-2h)v)^5}\int_0^1 (3-2u)\,du$$

$$\Longrightarrow\ \exists \xi \in]n, n+5[\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+4)^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+3)^3}-\frac{1}{(n+5)^3}\right) = \frac{24}{\xi^5}$$

Nous sommes passés de 48 à 36 puis à 24 qui ne peut plus être amélioré car ici on a un équivalent asymptotique lorsque $n \to \infty$. Et on a gagné au passage la minoration par $24/(n+5)^5$ en sus de la majoration par $24/n^5$. Réfléchir a donc été payant.

Et bien sûr on est conscient que cela n'est qu'un cas particulier de notre formule de Taylor-Lagrange quadri-points, dont on aurait pu suivre plus directement la preuve !

5 Convexité et dérivées et intégrales

Revenons à une fonction convexe générale. Les inégalités de convexité et leurs limites nous donnent :

$$a \leqslant b < c \leqslant d \implies f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leqslant f'_g(d) \leqslant f'_d(d)$$

Définissons :

$$g(x) = f'_g(x)\ .$$

C'est donc une fonction croissante. Elle admet des limites à gauche et à droite $g(x^-)$ et $g(x^+)$ en tout point (il va sans dire que tout ce que je dis est pour x dans l'intérieur de I et qu'il faut quelques adaptations si x est l'extrémité éventuelle gauche ou droite de I).

La façon la plus simple de déterminer ces limites $g(x^-)$ et $g(x^+)$ pour $g = f'_g$ est de d'abord relier f à g par une Intégrale de Riemann. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ et écrivons :

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{N} \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}(x_j - x_{j-1})\ ,$$

d'où l'encadrement $\sum_{j=1}^{N} g(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \sum_{j=1}^{N} g(x_j)(x_j - x_{j-1})$, valable pour $g = f'_g$ comme pour $g = f'_d$. Passant à la limite lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro on obtient, puisque la fonction croissante g est intégrable au sens de Riemann, $f(b) = f(a) + \int_a^b g(t)\,dt$. Ainsi (la réciproque et autres détails ayant été laissés au lecteur) :

Théorème 4. *Soit* I *un intervalle ouvert et* $x_0 \in$ I. *Les fonctions convexes sur* I *sont précisément les fonctions de la forme*

$$(*) \qquad f(x) = C + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

avec g *une fonction croissante. Lorsque l'on sait que* f *est convexe, on peut utiliser pour* g *dans* (*) *la fonction* f'_g *ou la fonction* f'_d.

Attention : si I possède une ou deux extrémités, f peut prendre en l'extrémité une valeur strictement supérieure à celle donnée par l'intégrale.

Les raisonnements classiques avec les intégrales nous permettent de déduire de (*) en tout point intérieur $f'_g(x) = g(x^-)$ et $f'_d(x) = g(x^+)$. Avec pour g la fonction f'_g elle-même, on voit donc que cette dernière est continue à gauche, et que $g(x^+) = f'_d(x)$. On montrerait de même que f'_d est continue à droite et que ses limites à gauche sont données par f'_g.

Théorème 5 (Application de (*) laissée en exercice)**.** *Soit* f *une fonction convexe sur un intervalle* I. *Alors, ou* f *est décroissante, ou* f *est croissante, ou* f *est d'abord décroissante puis croissante.*

On peut obtenir les limites à gauche et à droite des fonctions f'_d et f'_g sans utiliser d'intégrale, mais c'est plus difficile. Soit donc $g = f'_g$, c'est une fonction croissante. De $x < y < z$ résulte

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_g(y) = g(y) \leqslant g(z^-)$$

On fixe x et on fait tendre y vers z, cela donne

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant g(z^-)$$

Finalement on fait tendre x vers z et on obtient $g(z) = f'_g(z) \leqslant g(z^-)$. Ainsi,

$$\forall z \quad g(z^-) = g(z)$$

et g est continue à gauche.

De plus, comme $g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant g(y)$ pour $x < y$, en faisant tendre y vers x par valeurs supérieures on voit que

$$\forall x \quad g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant g(x^+)$$

Mais on a aussi $g(y) \leqslant f'_d(z)$ pour $x < y < z$, donc $g(x^+) \leqslant f'_d(z)$ et finalement

$$f'_d(x) \leqslant g(x^+) \leqslant \lim_{z \to x^+} f'_d(z)$$

Nous avions montré plus haut que les dérivées à gauche étaient continues à gauche, et de même (par exemple en remplaçant $f(x)$ par $f(-x)$) les dérivées à droite forment une fonction continue à droite. Au final :

$$\forall x \quad g(x^+) = f'_d(x)$$

Combinant tout, nous avons (re)-prouvé :

Théorème 6. *Pour toute fonction convexe* f *sur un intervalle ouvert* I, *la dérivée à gauche* $f'_g(x)$ *est une fonction croissante continue à gauche, et dont la limite à droite au point* x *est égale à la dérivée à droite* $f'_d(x)$ *de* f *au point* x. *Les points de dérivabilité de la fonction convexe* f *sont exactement les points de continuité de sa dérivée à gauche (ou de sa dérivée à droite).* ***Une fonction convexe dérivable est forcément de classe*** C^1***.***