Suites de fonctions intégrables

Jean-François Burnol, 22 octobre 2011

Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, les outils emblématiques concernant les suites d'intégrales sont le théorème de la convergence monotone et celui de la convergence dominée. Il ne faut pas oublier le Lemme de Fatou et l'important théorème de « continuité absolue » (lorsque g est intégrable sur X on a $\int_A |g|\,d\mu \to 0$ pour $\mu(A) \to 0$. On dit que la mesure complexe $g\,d\mu$ est μ-absolument continue ; pour X un intervalle et μ la mesure de Lebesgue, c'est lié à la « continuité absolue » qui caractérise les intégrales indéfinies).

Soit $p > 0$. Si l'on a une suite (f_n) de fonctions vérifiant $\int_X |f_n|^p\,d\mu \leqslant C < \infty$ et convergeant presque partout vers f, le Lemme de Fatou implique $\int_X |f|^p\,d\mu \leqslant C$, donc $f \in \mathcal{L}^p$. On est souvent intéressé par le comportement de $\int_X |f_n - f|^p\,d\mu$. Bizarrement, le résultat basique suivant ne semble pas être aussi universellement connu ou enseigné que ceux préalablement cités :

Théorème. *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $p > 0$*, et* (f_n) *une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^p$ *avec* $\sup_n \int_X |f_n|^p\,d\mu < \infty$*, convergeant presque partout vers* f*. Alors* $f \in \mathcal{L}^p$ *et on a l'équivalence :*

$$\lim \int_X |f_n - f|^p\,d\mu = 0 \iff \lim \int_X |f_n|^p\,d\mu = \int_X |f|^p\,d\mu\,. \tag{1}$$

Plus précisément :

$$\lim \left(\int_X |f_n - f|^p\,d\mu - \int_X |f_n|^p\,d\mu \right) = -\int_X |f|^p\,d\mu\,. \tag{2}$$

Preuve. On sait $f \in \mathcal{L}^p$ par Fatou. Attention, (1) dit seulement que si l'une des limites existe alors l'autre aussi. Par contre (2) (qui implique (1)) affirme qu'une certaine limite existe toujours. Le cas $p = 1$ est facile, car :

$$\Big|\, |f_n - f| - |f_n| \,\Big| \leqslant |f|\ , \tag{3}$$

et on a convergence dominée pour $\int (|f_n - f| - |f_n|)\,d\mu$ d'où le théorème. Ce raisonnement marche pour $0 < p < 1$, car par l'inégalité $0 \leqslant b \leqslant a \implies a^p - b^p \leqslant (a-b)^p$ liée à la concavité de la fonction $t \mapsto t^p$, on a pour tous x et y réels $\big| |x|^p - |y|^p \big| \leqslant \big| |x| - |y| \big|^p \leqslant |x - y|^p$ et ainsi :

$$\Big|\, |f_n - f|^p - |f_n|^p \,\Big| \leqslant |f|^p\ , \tag{4}$$

ce qui permet de raisonner comme pour $p = 1$.

Pour $p > 1$ je ne vois pas de méthode du même genre et aussi simple, bien que pour $p \geqslant 2$ j'en connaisse une un peu de ce type, déjà plus complexe. Je préfère présenter ici un raisonnement qui fonctionne avec tous les p. Quitte à retirer à X une partie négligeable, ce qui ne change pas les intégrales, on pourra supposer avoir $f_n \to f$ partout (et on peut supposer aussi $X \neq \emptyset$).

Soit $A > 1$ et $X_n = \{|f_n| \geqslant A|f|\}$. Définissons :

$$g_n = (|f_n - f|^p - |f_n|^p)\mathbf{1}_{\{|f_n|<A|f|\}} \ . \tag{5}$$

Si f(x) est nul, alors les $g_n(x)$ sont tous nuls et donc tous égaux à $-|f(x)|^p$. Si $|f(x)| > 0$ on a $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^p - |f_n(x)|^p$ pour n suffisamment grand donc $\lim g_n(x) = -|f(x)|^p$. De plus on a pour tout x la majoration $|g_n(x)| \leqslant ((A+1)^p + A^p)|f(x)|^p$, car $|g_n(x)| = 0$ si $|f_n(x)| \geqslant A|f(x)|$. Par le théorème de la convergence dominée il en résulte

$$\lim \int_{X_n^c} (|f_n - f|^p - |f_n|^p)\, d\mu = \lim \int_X g_n\, d\mu = -\int_X |f|^p\, d\mu \ . \tag{6}$$

Par ailleurs, lorsque $x \in X_n$, on a

$$(1 - \frac{1}{A})|f_n| \leqslant |f_n| - |f| \leqslant |f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant (1 + \frac{1}{A})|f_n| \tag{7}$$

Donc, avec $C = \sup_n \int_X |f_n|^p\, d\mu$ et $\eta(A) = (1 + \frac{1}{A})^p - (1 - \frac{1}{A})^p$:

$$\int_{X_n} \Big| |f_n - f|^p - |f_n|^p \Big|\, d\mu \leqslant \eta(A) \cdot C \tag{8}$$

En posant finalement $u_n = \int_X |f_n - f|^p\, d\mu - \int_X |f_n|^p\, d\mu$ il vient :

$$\begin{aligned} \left|u_n + \int_X |f|^p\, d\mu\right| &\leqslant \left|u_n - \int_X g_n\, d\mu\right| + \left|\int_X g_n\, d\mu + \int_X |f|^p\, d\mu\right| \\ &\leqslant \eta(A) \cdot C + \left|\int_X g_n\, d\mu + \int_X |f|^p\, d\mu\right| \end{aligned} \tag{9}$$

On prend la limite supérieure pour $n \to +\infty$ puis on fait tendre A vers $+\infty$ et on conclut que u_n tend vers $-\int_X |f|^p\, d\mu$, c.q.f.d. □

Sans supposer $\sup_n \int_X |f_n|^p\, d\mu < \infty$ mais seulement $f \in \mathcal{L}^p$ on a cet énoncé qui rend Fatou quantitatif :

$$\liminf \int_X |f_n|^p\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu + \liminf \int_X |f_n - f|^p\, d\mu \ , \tag{10}$$

et idem avec limsup. On peut le déduire du Théorème, ou le prouver directement avec des méthodes analogues.