Réduction de $ax^2 + bxy + cy^2$

Jean-François Burnol, 13 décembre 2009, pour M203

Une **conique** est le lieu des points du plan euclidien vérifiant :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

avec l'un au moins de a, b, ou c non nul. Prenons par exemple $x^2+2xy+5y^2 = (x+y)^2+(2y)^2$. En posant $x' = x + y$, $y' = 2y$, l'équation deviendra $(x')^2 + (y')^2 + d'x' + e'y' = f$, que l'on peut encore simplifier en $(x' + \frac{1}{2}d')^2 + (y' + \frac{1}{2}e')^2 = f'$. Donc en déplaçant l'origine des coordonnées et en utilisant un repère oblique on a réduit l'équation à $X^2 + Y^2 = f'$: si $f' < 0$, ensemble vide, si $f' = 0$ un point, et si $f' > 0$ un « cercle ». Mais attention nos coordonnées sont obliques, donc en réalité notre cercle est en général un ovale, qui s'appelle bien sûr une **ellipse**. Le problème est que nos nouvelles coordonnées ne sont pas rapportées à un repère orthonormé, et donc notre compréhension de cette ellipse est encore limitée.

Si nous partons de $x^2+6xy-7y^2 = (x+3y)^2-(4y)^2 = (x-y)(x+7y)$, c'est relativement facile d'y voir clair. En effet, on commence par faire en sorte que les deux facteurs linéaires aient la « même taille » : $(x-y)(x+7y) = \frac{1}{5}(5x-5y)(x+7y)$, avec $5^2+5^2 = 50 = 1^2+7^2$, puis on pose $U = \frac{1}{2}(5x-5y+x+7y) = 3x+y$, $V = \frac{1}{2}(5x-5y-x-7y) = 2x-6y$, de sorte que $x^2+6xy-7y^2 = \frac{1}{5}(U+V)(U-V) = \frac{1}{5}U^2-\frac{1}{5}V^2$. Ce sont maintenant U et V qui n'ont pas la « même taille » : posons donc $u = (3x+y)/\sqrt{10}$ et $v = -(2x-6y)/\sqrt{40} = (-x+3y)/\sqrt{10}$. Vous constatez qu'avec $\cos\theta = 3/\sqrt{10}$, $\sin(\theta) = 1/\sqrt{10}$, on a (notre mystérieux signe moins dans v a été mis pour cela) :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ce qui signifie précisément que (u, v) sont les coordonnées par rapport au repère orthonormé $(O, \vec{e}, \vec{f})$, $\vec{e} = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{f} = \left(\begin{smallmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$, dont les axes sont obtenus par une rotation d'angle θ. Et notre calcul nous a donné :

$$x^2 + 6xy - 7y^2 = \frac{1}{5}U^2 - \frac{1}{5}V^2 = 2u^2 - 8v^2$$

Si l'équation de notre conique est $x^2 + 6xy - 7y^2 + dx + ey = f$, alors avec ces nouvelles coordonnées elle devient $2u^2 - 8v^2 + d'u + e'v = f$ puis après un décalage de l'origine des coordonnées $2u'^2 - 8v'^2 = f'$, ou encore, avec $\gamma^2 = \frac{1}{8}|f'|$:

$$\frac{u'^2}{4\gamma^2} - \frac{v'^2}{\gamma^2} = \pm 1$$

suivant le signe de f', si celui-ci est non nul. On a alors une hyperbole, tandis que pour $f' = 0$ on a l'union des deux droites $u' - 2v' = 0$, $u' + 2v' = 0$. Ces deux droites sont les asymptotes de l'hyperbole, lorsque $f' \neq 0$. Ces deux droites sont parallèles aux droites d'équations $x-y = 0$ et $x+7y = 0$ (et même identiques lorsque $d = e = 0$) qui correspondent à la factorisation $x^2 + 6xy - 7y^2 = (x - y)(x + 7y)$.

Autrement dit, pour une hyperbole, c'est simple, on trouve la direction des asymptotes en factorisant la forme quadratique, et on passe au repère orthonormé dont les axes sont bissectrices de ces asymptotes. Pour une ellipse, c'est moins simple, car il n'y a pas d'asymptotes ! (sauf à utiliser des nombres imaginaires...)

Il nous faudrait donc une méthode générale pour **réduire** la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ dans un repère **orthonormé**. Une telle méthode générale existe : le problème est équivalent à trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$. Cette approche est de plus valable pour un nombre quelconque de variables (on a alors des matrices symétriques à 3, 4, ou plus, lignes et colonnes). Mais, comme nous avons pu le constater elle peut être calculatoirement compliquée dans les cas concrets, surtout si on s'écarte même un minimum de la route, par exemple en ne prenant pas des vecteurs propres de norme unité.

Je propose donc une méthode plus efficace du point de vue des calculs. Au passage on verra que $ac - \frac{1}{4}b^2 < 0$ donne les hyperboles (ou deux droites non parallèles), et $ac - \frac{1}{4}b^2 > 0$ les ellipses (ou un point, ou le vide). Les paraboles (ou deux droites parallèles, voire identiques, ou l'ensemble vide) proviennent de $ac - \frac{1}{4}b^2 = 0$, qui se produit lorsque $ax^2 + bxy + cy^2$ est (au signe près) le carré d'une forme linéaire.

En coordonnées polaires $(x, y) = (R\cos(\phi), R\sin(\phi))$, on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= R^2 \left(a\frac{1+\cos(2\phi)}{2} + b\frac{1}{2}\sin(2\phi) + c\frac{1-\cos(2\phi)}{2} \right) \\ &= R^2 \frac{1}{2} \left(a + c - \left((c-a)\cos(2\phi) - b\sin(2\phi) \right) \right) \end{aligned}$$

Maintenant on écrit $(c - a, -b) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$, ce qui donne :

$$R^2\frac{1}{2}(a + c - \rho\cos(2\phi - \theta))$$

$$= R^2\frac{1}{2}\left((a+c)\cos^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) + (a+c)\sin^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) - \rho(\cos^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) - \sin^2(\phi - \frac{1}{2}\theta)) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}R^2 \left((a+c-\rho)\cos^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) + (a+c+\rho)\sin^2(\phi - \frac{1}{2}\theta) \right) \\ &= \frac{1}{2}\left((a+c-\rho)u^2 + (a+c+\rho)v^2 \right) = \lambda u^2 + \mu v^2 \end{aligned}$$

Ici $(u, v) = (R\cos(\phi - \frac{1}{2}\theta), R\sin(\phi - \frac{1}{2}\theta))$: ce sont les coordonnées par rapport au repère obtenu par une rotation de $+\frac{1}{2}\theta$ à partir des axes du repère canonique. Et :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(c-a)^2 + b^2} \right) \\ \mu &= \frac{1}{2}\left(a + c + \sqrt{(c-a)^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

On constate que $\lambda + \mu = a + c$ et $\lambda\mu = ac - \frac{1}{4}b^2$: ce sont bien les valeurs propres de $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$.

Lorsque $4ac - b^2 = 0$, l'un de λ ou μ est nul, la forme quadratique est au signe près le carré d'une forme linéaire. Excluons ce cas. Si $4ac - b^2 < 0$ alors λ et μ sont de signes opposés, donc $\lambda < 0 < \mu$. On obtient des hyperboles, ou éventuellement deux droites non parallèles. Enfin, regardons $4ac - b^2 > 0$. Alors $ac > 0$ et donc a et c sont non nuls et du même signe. De plus λ et μ ont le même signe et ce signe est celui de $\lambda + \mu = a + c$. Quitte à remplacer (a, b, c) par $(-a, -b, -c)$, on supposera $a > 0$, $c > 0$. Alors $0 < \lambda \leq \mu$. On peut alors toujours, quitte à déplacer l'origine des coordonnées pour éliminer les termes linéaires $dx + ey = d'u + e'v$, se ramener à une équation du type $\lambda u^2 + \mu v^2 = f'$, ce qui donne l'ensemble vide si $f' < 0$, un point si $f' = 0$ et, si $f' > 0$:

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1$$

avec $A^2 = f'/\lambda \geq f'/\mu = B^2$. Le demi grand axe est A, le demi petit axe est B, l'excentricité e vaut

$$e = \frac{1}{A}\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

On ne peut obtenir un cercle que si $\lambda = \mu$, c'est-à-dire si $\rho = 0$, autrement dit $a = c$ et $b = 0$. C'est le moment de dire que dans ce cas-là nos calculs précédents ne sont pas faux, mais l'angle θ peut y être pris arbitraire : il n'y a pas d'axe privilégié pour un cercle !

La formule pour l'excentricité en fonction de (a, b, c) est relativement compliquée :

$$e^2 = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = \frac{2\sqrt{(c-a)^2 + b^2}}{a + c + \sqrt{(c-a)^2 + b^2}}$$

L'avantage de notre méthode c'est qu'elle nous donne l'orientation du grand axe de l'ellipse sous forme trigonométrique : c'est $\alpha = \frac{1}{2}\theta$, avec θ la coordonnée angulaire de $(c - a, -b)$ (ou encore on peut dire que c'est la direction donnée par le nombre complexe $\pm\sqrt{c - a - ib}$). Si $b = 0$, alors $\alpha = 0$ (modulo π) pour $a < c$, et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pour $a > c$. Si $b \neq 0$ on aura $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ pour $b < 0$ et $0 > \alpha > -\frac{\pi}{2}$ pour $b > 0$. Comme dans ces cas on a $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$ on peut se poser la question de la valeur de $\operatorname{tg}\alpha$. On sait que dans un cercle de centre O , si on prend un diamètre MM', l'angle fait entre la droite MM' et une droite MN avec N un autre point sur le cercle, est la moitié de l'angle entre OM' et ON. Donc l'angle α est aussi celui sous lequel on voit le point $(c - a, -b)$ à partir du point $-\sqrt{(c-a)^2 + b^2}$. On a donc :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-b}{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + b^2}}$$

(c'est la fameuse formule $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\psi) = \frac{\sin\psi}{\cos\psi + 1}$). Cette formule est valable aussi dans le cas où l'on obtient une hyperbole ($ac - \frac{1}{4}b^2 < 0$, $\lambda < 0 < \mu$), elle donne la direction de l'axe des coordonnées u. Comme l'équation de la conique est $\lambda u^2 + \mu v^2 = f'$, si $f' < 0$, il n'y a pas de point de l'hyperbole sur l'axe des v, les sommets de l'hyperbole sont sur l'axe des u ;

par contre si $f' > 0$, les sommets de l'hyperbole sont sur l'axe des v, axe perpendiculaire à celui donné par notre angle α.

Exemple (fichiers avec figures en p.j.) : on étudie les coniques $x^2+2txy+3y^2 = 14$, avec t un paramètre. Le discriminant de la forme quadratique est $3-t^2$, donc pour $t^2 > 3$ on a des hyperboles. Leurs asymptotes s'obtiennent par l'équation :

$$x^2 + 2txy + 3y^2 = (x + ty)^2 - (t^2 - 3)y^2 = (x + (t + \sqrt{t^2 - 3})y)(x + (t - \sqrt{t^2 - 3})y) = 0$$

Les bissectrices de ces asymptotes sont les axes de symétrie des hyperboles, dont les vecteurs directeurs sont les vecteurs propres de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ t & 3 \end{smallmatrix}\right)$. La direction du vecteur propre correspondant à la valeur propre négative est donnée par :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-b}{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + b^2}} = \frac{-2t}{2 + \sqrt{4 + 4t^2}} = \frac{-t}{1 + \sqrt{1 + t^2}}$$

Cependant comme ici $f' = 14 > 0$, les sommets de l'hyperbole sont situés sur la droite perpendiculaire, dont l'angle par rapport à l'axe des x fait :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t}$$

Pour $\sqrt{3} < t \to +\infty$, on a toujours $\frac{\pi}{4} < \beta$, et $\beta \to \frac{\pi}{4}$. On note que l'hyperbole pour $-t$ est symétrique de celle pour $+t$ dans l'axe des x (ou dans l'axe des y). Les sommets sont à la distance $|v| = \sqrt{\frac{14}{\mu}}$ de l'origine, $\mu = \frac{1}{2}\left(a + c + \sqrt{(c-a)^2 + b^2}\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \sqrt{4 + 4t^2}\right) = 2 + \sqrt{1 + t^2}$. Lorsque $t \to +\infty$, les sommets sont de plus en plus proches de l'origine. Dans le même temps l'équation des asymptotes est $\lambda u^2 + \mu v^2 = 0$, $u = \pm\sqrt{\frac{\mu}{-\lambda}}v$. Avec, pour $t \to +\infty$:

$$\frac{\mu}{|\lambda|} = \frac{2 + \sqrt{1 + t^2}}{-2 + \sqrt{1 + t^2}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{1 + t^2}} + \ldots$$

On voit que les asymptotes font un angle entre elles plus grand que $\frac{\pi}{2}$ (angle des secteurs contenant les branches de l'hyperbole), et se rapprochent pour t croissant, jusqu'à coïncider à la limite avec les axes des x et y. C'est peut-être le moment de signaler que notre branche d'hyperbole passe toujours par les points $(x, y) = (\sqrt{14}, 0)$ et $(0, \sqrt{\frac{14}{3}})$, et son autre branche par $(x, y) = (-\sqrt{14}, 0)$ et $(0, -\sqrt{\frac{14}{3}})$ (tout cela pour $t > 0$.)

Et en ce qui concerne les ellipses obtenues pour $t^2 < 3$, elles passent comme les hyperboles par les quatre mêmes points $(x, y) = (\sqrt{14}, 0), (0, \sqrt{\frac{14}{3}}), (-\sqrt{14}, 0), (0, -\sqrt{\frac{14}{3}})$. Elles ont comme centre l'origine des coordonnées. Le grand axe est suivant la direction d'angle α avec $\operatorname{tg}\alpha$ donné plus haut. Les demi grand et petit axes valent :

$$A = \sqrt{\frac{14}{\lambda}} = \sqrt{\frac{14}{2 - \sqrt{1 + t^2}}} \qquad B = \sqrt{\frac{14}{2 + \sqrt{1 + t^2}}}$$

On a toujours $B > \sqrt{\frac{14}{4}}$ et $B \to \sqrt{\frac{14}{4}}$ pour $t^2 \to 3$ tandis que $A \to +\infty$. La valeur limite de α pour $t \to +\sqrt{3}$ est $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (parallèle au segment allant de $(0, \sqrt{\frac{14}{3}})$ à $(\sqrt{14}, 0)$), et pour $t \to -\sqrt{3}$ c'est $\operatorname{tg}\alpha = +\frac{1}{\sqrt{3}}$.