À propos de la Leçon sur les parties compactes de $\mathbf{R}^m$: petit traité pas très compact sur les compacts.

Jean-François Burnol, janvier 2009

1 La propriété de Bolzano-Weierstrass

Théorème 1 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée dans $\mathbf{R}^m$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

Supposons connue la proposition pour $m = 1$, et montrons la par récurrence pour $m > 1$. Si (x_n) est une suite bornée dans $\mathbf{R}^m$, il en est de même de la suite $(x_n^{(1)})$ dans $\mathbf{R}$ des premières composantes. On peut en extraire une suite convergente, c'est-à-dire qu'il existe $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $y_n = x_{\phi(n)}$ est telle que $y_n^{(1)}$ converge. Les autres composantes forment une suite bornée dans $\mathbf{R}^{m-1}$, dont par hypothèse de récurrence on peut extraire une suite convergente. Donc en passant à une deuxième suite extraite $z_n = y_{\psi(n)}$ on peut obtenir que toutes les composantes convergent, et ainsi $\lim z_n$ existe dans $\mathbf{R}^m$.

Le cas $m = 1$ est donc le point central. On l'établit à partir de la propriété basique suivante des nombres réels, que l'on prouve en général immédiatement après ou pendant la construction des nombres réels : *toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.* Compte tenu de cela le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbf{R}$ peut être obtenu comme corollaire du lemme suivant :

Lemme : *Toute suite de nombres réels possède une suite extraite monotone.*

Preuve : `http://jf.burnol.free.fr/agregsuiteextraite.pdf`

Une autre technique pour établir la propriété de Bolzano-Weierstrass est par dichotomie : considèrons une suite (x_n) dans $[-X, +X]$, posons $a_0 = -X$, $b_0 = +X$, et s'il y a une infinité d'indices n avec $x_n \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$, on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, sinon on prend $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Dans les deux cas il y a une infinité d'indices n avec $x_n \in [a_1, b_1]$. On peut itèrer la procédure, d'où $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \dots$ et $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \dots$, suites monotones bornées donc convergentes, de limite commune l puisque $b_n - a_n \to 0$. La suite extraite $y_n = x_{\phi(n)}$ est définie par récurrence en prenant $\phi(n)$ égal au plus petit entier m strictement plus grand que les $\phi(k)$, $k < n$ et tel que x_m soit dans $[a_n, b_n]$. On a ainsi $a_n \leq y_n \leq b_n$ donc $\lim y_n = l$.

2 Bornes supérieures et inférieures

On notera que la preuve de «*toute partie A non vide et majorée de* **R** *possède une borne supérieure*» à partir de «*toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge*» peut se faire de manière assez analogue.

Preuve 1 : soit $a_0 \in A$ et b_0 un majorant de A. On raisonne par dichotomie : s'il existe un élément de A plus grand que $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ on en prend un que l'on note a_1 et l'on pose $b_1 = b_0$. Sinon $\frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ est un majorant, on le note b_1 et on pose $a_1 = a_0$. On itère. Ainsi (a_n) est une suite croissante dans A et (b_n) est une suite décroissante de majorants. Donc $a = \lim a_n$ et $b = \lim b_n$ existent. De plus $0 \leq b_n - a_n \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$, donc $a = b$. Ce b est un majorant, car il est limite de majorants. Il est le plus petit majorant possible, car il est limite (sur sa gauche) de points de A. Il est donc ce que l'on appelle la borne supérieure de A.

Preuve 2 : soit b_0 le plus petit majorant de A qui soit dans $\mathbf{Z}$, et plus généralement b_n le plus petit majorant de A dans $\frac{1}{2^n}\mathbf{Z}$ (ils existent car toute partie non vide de $\mathbf{N}$ a un élément minimal). Il est clair que (b_n) est une suite décroissante et que sa limite b est la borne supérieure recherchée. Détails laissés au lecteur.

Dans la suite nous utiliserons sans plus de commentaire les bornes supérieures et inférieures pour les parties (non vides) de **R**.

3 Bolzano-Weierstrass et fermés bornés

Le théorème suivant peut aussi être appelé Théorème de Bolzano-Weierstrass, lui et le théorème 1 sont facilement montrés équivalents :

Théorème 2 *Pour un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^m$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé et borné,*
2. *toute suite de A possède une sous-suite convergente dans A.*

En effet si A est fermé et borné, tout suite dans A est bornée donc possède une sous-suite convergente (dans $\mathbf{R}^m$) et comme A est fermé, la limite est dans A. Réciproquement, si A n'était pas borné, il suffirait de prendre une suite $x_n \in A$ avec $\lim \|x_n\| = \infty$ (avec la norme euclidienne par exemple) pour avoir une suite dont aucune sous-suite ne peut converger dans A, et si A n'était pas fermé il existerait une suite $x_n \in A$, convergente vers un point b de $\mathbf{R}^m \setminus A$ (en effet, ce complémentaire n'étant pas ouvert il existe un b tel pour tout $\epsilon > 0$ la boule ouverte de centre b de rayon ϵ rencontre A ; on prend ici la distance euclidienne, ou sup, ou l^1, peu importe). Toute sous-suite converge vers ce b qui n'est pas dans A.

4 La propriété de Borel-Lebesgue

Le théorème suivant fut prouvé par Borel pour des recouvrements dénombrables et étendu par Lebesgue à des recouvrements quelconques.

Théorème 3 *De tout recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Plus généralement de tout recouvrement d'un pavé fermé borné $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$, $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$, par des ouverts de $\mathbf{R}^m$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Preuve 1 : On considère $\mathbf{R}^m$ comme un espace métrique, avec comme distance $d(x, y) = \max_{1 \le j \le m} |x_j - y_j|$. On va faire la preuve par l'absurde. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement du pavé P par des ouverts de $\mathbf{R}^m$, dont on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini. Si x est un point du pavé P, considérons l'ensemble A_x des $r \ge 0$ tels que la boule ouverte $B(x, r)$ de centre x et de rayon r est incluse dans l'un des ouverts du recouvrement. Si $r \in A_x$ alors $[0, r] \subset A_x$ donc A_x est soit $[0, \sup A_x[$, soit $[0, \sup A_x]$. On posera $r(x) = \sup A_x$ (on peut observer que $r(x) = +\infty$ est exclu par le fait que $B(x, R)$ recouvre tout P lorsque R est suffisamment grand, mais peu importe). On a $0 < r(x)$ pour tout x. Supposons qu'il existe $\rho > 0$ avec $\rho < r(x)$ pour tous les x du pavé P. Pour chacun des intervalles $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$ on peut choisir un nombre fini de réels $\gamma_k^{(j)}$, tels que tout autre réel de l'intervalle est à distance au plus $\frac{1}{2}\rho$ de l'un des $\gamma_k^{(j)}$. On considère alors tous les points du pavé P, en nombre fini N, dont, pour chaque j, la j^{e} coordonnée est l'un des $\gamma_k^{(j)}$. Par construction P est dans l'union des boules ouvertes centrées en ces points x_n, $1 \le n \le N$, et de rayons constants ρ. Comme pour chaque n on a $\rho < r(x_n)$, chaque $B(x_n, \rho)$ est incluse dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$. Donc P est recouvert par un nombre fini d'ouverts pris dans $\mathcal{U}$. Contradiction. Ainsi il n'existe pas de minorant strictement positif aux $r(x)$, et donc on peut considérer une suite de points x_n dans le pavé P avec $\lim r(x_n) = 0$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, quitte à passer à une suite-extraite on peut aussi supposer que $x = \lim x_n$ existe. Mais alors si n est suffisamment grand on a $d(x_n, x) < \frac{1}{5}r(x)$. La boule ouverte centrée en x_n et de rayon $\frac{3}{5}r(x)$ est incluse dans $B(x, \frac{4}{5}r(x))$ donc est incluse dans l'un des ouverts du recouvrement. Donc, par définition, $r(x_n) \ge \frac{3}{5}r(x)$. Mais alors $\lim r(x_n) = 0$ est contredit. Ceci conclut la preuve.

Preuve 2 : Cette preuve reprend une technique utilisée par Cousin pour un travail (lié à un problème d'analyse complexe) qui date de la même époque que le résultat de Borel. Soit dans $\mathbf{R}^m$ un pavé $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_m$, $I_j = [\alpha_j, \beta_j]$, qui possède un recouvrement par une collection $\mathcal{U}$ d'ouverts, collection dont aucune sous-collection finie ne suffirait à recouvrir P. Le pavé peut être subdivisé en 2^m pavés P_k en découpant chaque intervalle $[\alpha_j, \beta_j]$ en deux. Si pour chaque sous-pavé P_k il existait une sous-collection finie de $\mathcal{U}$ le recouvrant, en les combinant on obtiendrait un recouvrement fini de P. Donc la mauvaise propriété vaut pour au moins l'un des sous-pavés. On en choisit un, on le note P^1 et on itère. On obtient ainsi une suite décroissante de mauvais pavés P^n dont l'intersection est un certain point x de P (pour ne pas me salir les mains je n'explicite pas les notations, on n'a besoin ici que de savoir que toute suite croissante majorée converge comme dans les raisonnements faits pour Bolzano-Weierstrass ; on aura aussi noté que c'est à cet endroit que l'on utilise le fait que P est un pavé fermé). L'un des ouverts U contient x, et donc contient la boule ouverte (distance liée à la norme sup) de rayon $\epsilon > 0$ suffisamment petit, et donc contient P^n entièrement lorsque n est suffisamment grand. Contradiction.

5 Borel-Lebesgue et fermés bornés

On a le théorème suivant, aussi appelé Théorème de Borel-Lebesgue (ou Heine-Borel suivant le pays), il est une généralisation immédiate du théorème 3 :

Théorème 4 *Pour un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^m$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé et borné,*
2. *tout recouvrement de A par des ouverts de $\mathbf{R}^m$ possède un sous-recouvrement fini.*

Preuve : Supposons que A soit un sous-ensemble fermé et borné, donc on peut choisir un pavé fermé borné P qui le contienne. Soit V l'ouvert $\mathbf{R}^m \setminus A$, et soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de A par des ouverts de $\mathbf{R}^m$. En adjoignant V à $\mathcal{U}$ on a un recouvrement de P par des ouverts, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini par le théorème de Borel-Lebesgue. Quitte à jeter V s'il est dans cette liste finie, puisqu'il n'intersecte pas A, on obtient un recouvrement de A par un nombre fini d'ouverts pris dans $\mathcal{U}$.
Réciproque : si A n'était pas borné, il suffirait de prendre les boules ouvertes $B(0, n)$ pour avoir un recouvrement dont aucun sous-recouvrement fini n'est possible. Et si A n'était pas fermé, soit b un point du complémentaire tel que $B(b, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $\epsilon > 0$, un tel point existe car le complémentaire de A n'est pas un ouvert. On prend alors les ouverts $\{x \in \mathbf{R}^m, d(x, b) > \frac{1}{n}\}$, dont l'union recouvre A. Aucun sous-recouvrement fini n'est possible.

6 Caractérisation des parties compactes de $\mathbf{R}^m$

Théorème 5 *Pour un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^m$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est fermé et borné,*
2. *toute suite de A possède une sous-suite convergente dans A.*
3. *tout recouvrement de A par des ouverts de $\mathbf{R}^m$ possède un sous-recouvrement fini.*

C'est la combinaison des théorèmes précédents. Les parties de $\mathbf{R}^m$ possédant ces propriétés sont dites **compactes** (le mot « compact » a été proposé par Fréchet en 1906). Il est simple de voir, à partir du théorème, que, par exemple, un fermé dans un compact est un compact, qu'un produit fini de compacts est un compact. Il y a une définition générale pour les espaces topologiques, pour laquelle ces propriétés restent valables :

Définition 1 *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et s'il possède la propriété de Borel-Lebesgue d'extraction de sous-recouvrements finis des recouvrements par des ouverts.*

Remarquons que pour $A \subset \mathbf{R}^m$, lorsqu'on le considère en tant qu'espace topologique et que l'on se met à parler d'un « ouvert de A », c'est l'intersection d'un ouvert de $\mathbf{R}^m$ avec A, et que la définition de la compacité pour les espaces topologiques est compatible avec celle donnée pour les parties de $\mathbf{R}^m$.

7 Espaces métriques compacts

Un espace métrique est toujours séparé. Il est donc compact si et seulement si il possède la propriété de Borel-Lebesgue. On peut aussi caractériser la compacité par la possibilité d'extraire des sous-suites convergentes (je ne sais pas à qui l'on attribue cette équivalence) :

Théorème 6 *Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est compact (au sens des recouvrements).*
2. *X est séquentiellement compact : toute suite possède une suite extraite convergente.*

Preuve : Si X est vide les deux assertions sont trivialement vraies. On supposera X non vide dans la preuve. L'implication *séq. compact* $\Longrightarrow$ *compact* est la plus difficile. Commençons par elle, on en fera la preuve par l'absurde. On imite la méthode inspirée de la Thèse de Cousin. D'abord on dit que pour chaque $\epsilon > 0$ un nombre fini de boules ouvertes de rayons ϵ couvrent X, car sinon on construirait, par un raisonnement facile, une suite avec la propriété $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ pour $n \neq m$. Et clairement aucune suite extraite ne pourrait alors être convergente. Ensuite soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts, qui n'admettrait aucun sous-recouvrement fini. Pour chaque $\epsilon = \frac{1}{n}$ on se munit d'un nombre fini de boules de rayons $\frac{1}{n}$ et dont la réunion est X. L'une d'entre elles ne peut pas être couverte par un nombre fini d'ouverts de $\mathcal{U}$; on en prend une dont on note x_n le (un) centre. De la suite (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente x_{n_k}. Soit x la limite de cette sous-suite. Soit U un ouvert de $\mathcal{U}$ qui contient x. Pour un k suffisamment grand la boule ouverte centrée en x_{n_k} et de rayon $1/n_k$ est entièrement dans U, contradiction.

Pour l'autre sens c'est plus facile. Ici aussi on raisonne par l'absurde : supposons que nous ayons une suite (x_n) dont aucune suite extraite ne converge. Alors, nécessairement, pour tout $x \in X$ il existe un entier $N \geq 1$ tel que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N},\ d(x_n, x) < \frac{1}{N}\}$ soit de cardinalité finie (sinon on construirait une suite extraite de limite x). Prenons $N(x)$ le plus petit des $N \geq 1$ possibles, et considérons le recouvrement de X par les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{N(x)})$. Pour chacune de ces boules, il n'y a qu'un nombre fini d'indices n avec x_n dans la boule. Il est donc impossible de recouvrir la totalité de X par un nombre fini de ces boules (on reconnaît une variante d'un argument de dichotomie ici). Notre recouvrement n'autorise aucun sous-recouvrement fini de X. Ceci conclut la preuve du Théorème d'équivalence.

Exercice : tout espace métrique compact est complet.

Dans le cas des espaces topologiques généraux ni l'implication *séq. compact* $\Longrightarrow$ *compact* ni l'implication *compact* $\Longrightarrow$ *séq. compact* ne sont vraies. Mais :

Théorème 7 *Soit X un espace topologique séparé. Si X est séquentiellement compact alors de tout recouvrement* dénombrable *par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Preuve : on peut supposer X non vide. Soit $\mathcal{U} = \{U_n, n \in \mathbf{N}\}$ un recouvrement **dénombrable** par des ouverts que l'on peut supposer non vides. Supposons que l'on n'a jamais $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$. Soit alors x_n dans le complémentaire. Une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ converge vers un certain point limite l. Ce point l est dans au moins un U_N. Et ainsi $x_{\phi(n)} \in U_N$ pour n grand. Mais cela est faux dès que $n \geq N$ (car $\phi(n) \geq n$ donc $x_{\phi(n)} \notin U_0 \cup \cdots \cup U_n$ donc $x_{\phi(n)} \notin U_N$ pour $n \geq N$.)

8 Fonctions continues sur les compacts de $\mathbf{R}^m$

Théorème 8 *Soit $A \subset \mathbf{R}^m$ un compact non vide et soit $f : A \to \mathbf{R}^p$ une fonction continue. Alors :*

1. *$f(A)$ est un compact de $\mathbf{R}^p$ (en particulier f est bornée),*
2. *et, lorsque $p = 1$, f atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Preuve : Soit (y_n) une suite dans $f(A)$. On choisit des x_n dans A avec $f(x_n) = y_n$. Comme A est compact il existe une suite extraite convergente dans A. Comme f est continue, en particulier continue au point limite l qui est dans A, la suite extraite correspondante de $(f(x_n))$ a pour limite $f(l)$ qui est un point de $f(A)$. Donc $f(A)$ est compact. Il est tout aussi immédiat de prouver ceci avec les recouvrements par des ouverts, ici on utilisera que l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. Attention cependant que par « ouvert », on veut dire ici ouvert de A, ou de $f(A)$, au sens de la topologie induite. Sinon, si l'on recouvre $f(A)$ avec des ouverts V de $\mathbf{R}^p$ alors on ne doit pas dire que $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbf{R}^m$, attention, ce qu'il faudrait dire c'est que $f^{-1}(V)$ (qui est un sous-ensemble de A) est aussi $U \cap A$ avec U un ouvert de $\mathbf{R}^m$. Ce sont de tels U qu'il faudrait considérer dans les recouvrements. Il est plus simple de travailler avec A et $f(A)$ comme espaces topologiques avec la topologie (ou une métrique) induite. Maintenant, pour le célèbre point (2), prenons une fonction numérique. Le compact $f(A)$ est borné, soit $M = \sup f(A)$, il est limite de points de $f(A)$ mais $f(A)$ est aussi fermé, donc $M \in f(A)$, ce qui signifie que f atteint sa borne supérieure. Idem pour sa borne inférieure.

Exercice : *soit $A \subset \mathbf{R}^m$. Alors A est compact si et seulement si toute fonction continue sur A, à valeurs réelles, est bornée.*

Solution : le fait qu'une fonction continue sur un compact soit bornée fait partie du précédent théorème. Pour la réciproque, on montre que A est borné (utiliser la restriction à A de la fonction $x \mapsto \|x\|$, avec la norme sup par exemple), et aussi qu'il est fermé (utiliser pour tout point b du complémentaire la fonction $x \mapsto \|x-b\|^{-1}$). Les fonctions considérées sont continues pour la topologie induite sur A par la topologie usuelle de $\mathbf{R}^m$, par définition de celle-ci où les produits d'intervalles $]a,b[$ servent de base à la topologie.

La notion de compacité, en particulier dans ses aspects de recouvrements par des ouverts, a émergé lors de l'étude de la notion de continuité, en particulier de la notion de continuité uniforme.

Théorème 9 *Soit $A \subset \mathbf{R}^m$ un compact et soit $f : A \to \mathbf{R}^p$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.*

Preuve 1 : On prend A non vide. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque $a \in A$, par continuité de f au point a, il existe un $r > 0$ (dépendant de a) tel que $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}\epsilon$ pour tout $x \in B(a,r) \cap A$ (on utilise la métrique « sup », pour définir les boules de $\mathbf{R}^m$, et de plus $|\cdot|$ désigne la norme sup sur $\mathbf{R}^p$). Donc $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ lorsque x et y sont tous deux dans $B(a,r) \cap A$. On peut recouvrir le compact A par un nombre fini de boules $B(a_n, \frac{1}{2}r_n)$, $1 \leq n \leq N$ (notez bien le $\frac{1}{2}$). Soit alors r le minimum des r_n, qui est strictement positif. Si x et y sont dans A avec $|x-y| < \frac{1}{2}r$, il existe un n avec $x \in B(a_n, \frac{1}{2}r_n)$, et, comme $r \leq r_n$, on en déduit $y \in B(a_n, r_n)$, ce qui vaut aussi pour x bien sûr, donc $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Ainsi f est uniformément continue (par la définition de cette notion).

Preuve 2 : par l'absurde, il existerait $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ il existerait x_n et y_n dans A avec à la fois $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ et $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$.[1] Quitte à passer à une suite extraite pour les x_n on peut supposer qu'elle converge. Quitte alors à passer à une suite extraite pour les y_n on peut supposer qu'elle aussi converge. Mais la limite l doit être commune à cause de $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ (qui est préservé par le passage aux suites extraites). La continuité de f au point l permet d'affirmer que $|f(x_n) - f(y_n)| \to |f(l) - f(l)| = 0$, contradiction.

Théorème 10 *Soit $A \subset \mathbf{R}^m$ un compact et $f : A \to \mathbf{R}^p$ injective continue. Alors la fonction réciproque $g : f(A) \to A$ est continue.*

Preuve : Il s'agit de montrer que $g^{-1}(U)$ est un ouvert de $f(A)$, pour tout ouvert U de A (pour la topologie induite). Autrement dit que $f(U)$ est un ouvert de $f(A)$. Mais $f(U)$ est le complémentaire dans $f(A)$ de l'image par f du complémentaire dans A de U. Ce dernier $F = A \setminus U$ est un fermé de A, et nous avons déjà dit (la justification est immédiate) qu'un fermé dans un compact est un compact. Donc F est un compact de $\mathbf{R}^m$ et par conséquent $f(F)$ est un compact, donc un fermé de $\mathbf{R}^p$, donc $f(U)$ qui est l'intersection avec $f(A)$ de l'ouvert $\mathbf{R}^p \setminus f(F)$ est un ouvert de $f(A)$, ce qu'il fallait démontrer.

1. ici $|\cdot|$ désigne suivant le contexte la norme sup sur $\mathbf{R}^m$ ou sur $\mathbf{R}^p$.

9 Critère de compacité pour les espaces métriques

Cette section complète la discussion des espaces métriques généraux.

Théorème 11 *Soit (X, d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est compact.*
2. *X est séquentiellement compact.*
3. *X est complet et, pour chaque $\epsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayons ϵ.*

Preuve : (1) $\iff$ (2) est déjà établi. Le fait que (2) implique que X est complet (je l'avais laissé en exercice) s'explique par l'observation facile qu'une suite de Cauchy dont une sous-suite converge est elle-même convergente. Et il est immédiat que si (1) vaut, alors, pour tout $\epsilon > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayons $\epsilon > 0$. Ainsi (1) $\iff$ (2) $\implies$ (3).

Montrons (3) $\implies$ (2). On fait une preuve par dichotomie (généralisée). Soit (x_n) une suite dans X. Pour chaque $K \geq 1$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B_{K,j}$, $1 \leq j \leq J(K)$, de rayons $\frac{1}{K}$. Prenons pour commencer $K = 1$. Pour l'un des j compris entre 1 et $J(1)$, on doit avoir $\#\{n, x_n \in B_{1,j}\} = \infty$, on prend le plus petit tel j, on écrit $B_1 = B_{1,j}$ et ensuite on définit n_1 comme le plus petit n avec x_n dans B_1. Ensuite on passe à $K = 2$, il doit y avoir un indice j tel que $\#\{n, x_n \in B_1 \cap B_{2,j}\} = \infty$, on note $B_2 = B_{2,j}$ et on prend n_2 égal au plus petit $n > n_1$ avec x_n dans $B_1 \cap B_2$. Supposons connus $n_1 < n_2 < \cdots < n_L$, et B_1, …, B_L, tels qu'il y ait une infinité de n avec x_n dans l'intersection $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_L$. On prend le plus petit j tel qu'il existe une infinité de n avec x_n dans $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_L \cap B_{L+1,j}$, on pose $B_{L+1} = B_{L+1,j}$ et on note n_{L+1} le plus petit indice $n > n_L$ avec $x_n \in B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_L \cap B_{L+1}$. Ainsi on construit par récurrence une suite extraite $y_k = x_{N_k}$, et pour tous les $j \geq k$ on est assuré que tous les $y_j = x_{N_j}$ sont dans B_k, qui est une boule de rayon $\frac{1}{k}$, donc $|y_k - y_j| \leq \frac{2}{k}$. Ainsi la suite (y_k) est une suite de Cauchy, et comme par hypothèse X est complet, elle est convergente. Ainsi toute suite possède une suite extraite convergente, c'est-à-dire (2) est vrai. Ceci conclut la preuve.

On dit que l'espace métrique X est pré-compact (ou totalement borné) s'il a la propriété de recouvrement par un nombre fini de boules de rayon ϵ, pour tout $\epsilon > 0$.

Si X est complet alors $Y \subset X$ est fermé dans X (notion extrinsèque) si et seulement si il est complet (notion intrinsèque) (voir plus bas). Donc les parties compactes de l'espace métrique complet X sont les parties qui sont à la fois fermées et totalement bornées.

Dans la preuve ci-dessus on voit que l'on a prouvé que si l'espace métrique X est totalement borné, alors toute suite possède une suite extraite de Cauchy. Supposons au contraire que X n'est pas totalement borné, et soit $\epsilon > 0$ tel qu'on ne puisse pas recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ϵ. Soit $x_1 \in X$. Comme $B(x_1, \epsilon)$ ne recouvre pas X, soit x_2 dans le complémentaire. Comme $B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$ ne recouvre pas X soit x_3 dans le complémentaire. Et ainsi de suite. La suite (x_n) ainsi créée est telle que $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ pour $n \neq m$, donc elle ne possède aucune suite extraite avec la propriété de Cauchy. Ainsi : *un espace métrique est totalement borné si et seulement si toute suite possède une suite extraite avec la propriété de Cauchy.*

On terminera par : X *est totalement borné si et seulement si son complété est compact.* Preuve laissée au lecteur, comme conséquence de ce qui précède.

10 Espaces métriques et Topologie induite

Une remarque triviale, mais... disons que c'est au cas où. Si (X, d) est un espace métrique, tout sous-ensemble $Y \subset X$, muni de la restriction de d à $Y \times Y$ est bien sûr aussi un espace métrique. Montrons que la topologie induite sur Y par celle de X est la même que celle de Y comme espace métrique : soit tout d'abord U un ouvert de X et $V = U \cap Y$. Soit $x \in V$, donc $x \in U$. Il existe $a > 0$ tel que tout y de X avec $d(x, y) < a$ est dans U, donc tout y de Y avec $d(x, y) < a$ est dans V, donc V est un ouvert de Y. Réciproquement soit V un ouvert de Y. Pour tout x de V il existe $\rho(x) > 0$ tel que la boule $\{y \in Y, d(x, y) < \rho(x)\}$ est dans V. Pour ne pas avoir à invoquer l'axiome du choix on peut redéfinir $\rho(x)$ comme étant le plus grand possible (éventuellement $+\infty$). L'union U des boules ouvertes dans X centrées en les x et de rayons $\rho(x)$ est un ouvert de X et vérifie $U \cap Y = V$. Donc V est bien un ouvert pour la topologie induite sur Y par celle de X.

11 Compacts dans un compact

Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors $Y \subset X$ est compact (notion intrinsèque) si et seulement si il est fermé (notion extrinsèque) dans X.

Preuve : si Y est compact soit y dans son adhérence, donc de la forme $y = \lim y_n$ avec (y_n) une suite de Y. Cela signifie que $\lim d(y, y_n) = 0$. Or, comme Y est compact, il existe $z \in Y$ et une suite extraite telle que $\lim d(z, y_{n_k}) = 0$. Comme $d(y, z) \leq d(y, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, z)$ on en déduit $y = z$ (unicité de la limite dans un espace métrique). Donc en fait $y \in Y$, et ainsi Y est bien fermé dès qu'il est compact. Montrons la réciproque : si (y_n) est une suite dans Y, elle possède une suite extraite convergente dans X, puisque ce dernier est compact. La limite de cette suite extraite est dans l'adhérence de Y, mais comme Y est fermé, cela veut dire qu'elle est dans Y. Donc (y_n) possède une suite extraite convergente dans Y, et ainsi Y est compact.

12 Compacts dans un compact (bis)

Soit X un espace **topologique** compact et $Y \subset X$ un sous-ensemble muni de la topologie induite. Alors Y est compact si et seulement si il est fermé.

Preuve : Notons tout d'abord que Y est séparé (raisonnement au lecteur). Supposons le compact. Soit $x \notin Y$, et pour chaque $y \in Y$ prenons des ouverts U_y et V_y de X tels que $V_y \cap U_y = \emptyset$, $y \in V_y$, $x \in U_y$. Les $W_y = V_y \cap Y$ forment un recouvrement ouvert de Y, donc il existe un sous-recouvrement fini, associé à $y_1, \ldots, y_N$. L'intersection finie U des U_{y_k} est un ouvert de X qui contient x. De plus tout y de Y est dans l'un des V_{y_k} donc n'est pas dans l'un des U_{y_k}, donc n'est pas dans U. Donc $U \cap Y = \emptyset$. Ainsi le complémentaire de Y est ouvert, et par conséquent Y est un fermé de X. Réciproquement, s'il est fermé, soit $\mathcal{V}$ un recouvrement par des ouverts V pour la topologie induite. Pour chaque V on choisit (il faut l'axiome du choix je pense) un U ouvert de X avec $U \cap Y = V$. Les U, en compagnie de $X \setminus Y$, forment un recouvrement ouvert de X. Ce dernier est compact, on a un sous-recouvrement fini. On prend les intersections avec Y cela montre que $\mathcal{V}$ admettait un sous-recouvrement fini. Donc Y est compact.

13 Image d'un compact

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Si X est compact et Y séparé alors $f(X) \subset Y$ est compact. En effet si $\mathcal{V}$ est un recouvrement par des ouverts (pour la topologie induite) de $f(X)$, pour chaque tel ouvert V on peut le voir comme $W \cap f(X)$ avec W un ouvert de Y, donc $f^{(-1)}(V) = f^{(-1)}(W)$ est un ouvert U de X. Les U forment un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $U_1, \ldots, U_N$. Tout y dans $f(X)$ possède un antécédent x, qui est dans l'un des U_j, ce qui signifie que y est dans l'un V_j. Donc $f(X)$ est compact

J'ai supposé Y séparé pour pouvoir affirmer que $f(X)$ est séparé. Considérons $X = [-1, 1]$ muni de la topologie usuelle et $Y = [-1, 1]$ où les ouverts sont les ouverts usuels stables par $y \to -y$. L'application identité $f : X \to Y$ est continue, mais $f(X)$ $(= Y)$ n'est pas compact, car pas séparé.

14 Fonctions continues et compacité 1

Théorème 12 *Soit (X, d) un espace métrique compact. Toute fonction sur X à valeurs réelles qui est continue est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve 1 : on supposera X non vide. Si $f : X \to \mathbf{R}$ n'est pas bornée alors les ouverts $U_n = f^{(-1)}(]-n, +n[)$ forment un recouvrement ouvert de X dont aucun sous-recouvrement fini n'est possible. Ou alors on suppose $|f(x_n)| \to \infty$ on remplace (x_n) par une suite extraite convergente et on obtient une contradiction. Si maintenant $A = \sup f(X)$ n'était pas atteint alors les ouverts $U_n = f^{(-1)}(]-\infty, A - \frac{1}{n}[)$ formeraient un recouvrement ouvert de X dont aucun sous-recouvrement fini ne serait possible. Idem pour $B = \inf f(X)$.

Preuve 2 : on rappelle que $f(X)$ doit être un compact dans $\mathbf{R}$ et nous savons que ceux-ci sont les fermés bornés.

15 Recouvrements d'un espace métrique compact

Soit (X,d) un espace métrique et $\mathcal{U}$ un recouvrement par des ouverts. Comme dans la preuve de la propriété de Borel-Lebesgue pour les pavés de $\mathbf{R}^m$ nous pouvons associer à ce recouvrement une fonction $r : X \to]0,+\infty]$ en désignant par $r(x)$ le supremum des rayons des boules ouvertes centrées en x et contenues dans l'un des ouverts U de $\mathcal{U}$. Je dis que :

$$\begin{array}{lll} \text{soit} & \forall x \in X \quad r(x) = +\infty & \\ \text{soit} & \forall x \quad r(x) < +\infty \quad \text{et} & \forall x, y \in X \quad |r(x) - r(y)| \leq d(x,y) \end{array}$$

S'il existe x avec $r(x) = +\infty$ alors pour tout y et pour tout N, la boule ouverte $B(y,N)$ est incluse dans $B(x, N + d(x,y))$ donc dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$, donc $r(y) \geq N$ et finalement $r(y) = +\infty$. Supposons dorénavant que r est finie. Soit x et soit alors y avec $d(x,y) < r(x)$. Soit $\epsilon > 0$ très petit, la boule $B(x, r(x) - \epsilon)$ donc aussi la boule $B(y, r(x) - \epsilon - d(x,y))$ sont incluses dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$. Donc $r(y) \geq r(x) - \epsilon - d(x,y)$. Donc $r(y) \geq r(x) - d(x,y)$. Et ceci reste valable si $d(x,y) \geq r(x)$, tautologiquement. Donc on a toujours $r(y) - r(x) \geq -d(x,y)$ et en échangeant les rôles de x et de y on a ce que l'on voulait.

La fonction r est donc, soit identiquement $+\infty$, soit une fonction **continue** à valeurs strictement positives. Comme conséquence de la continuité de la fonction r, il existe $a > 0$ avec $r(x) > a$ pour tout x (si aucun a ne convenait, $\frac{1}{r}$ serait une fonction continue non bornée). Ainsi : *pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ du compact (X,d) il existe $a > 0$ tel que pour tout x la boule ouverte $B(x,a)$ est entièrement contenue dans l'un des ouverts U du recouvrement.*

Exercice : démontrez cela directement à partir de la propriété d'extraction d'un sous-recouvrement fini.

16 Fonctions continues et compacité 2

Nous avions traité en exercice le théorème suivant, pour les compacts de $\mathbf{R}^n$ et via la caractérisation « fermé-borné » :

Théorème 13 *Soit (X,d) un espace métrique. Si toute fonction continue sur X à valeurs réelles est bornée alors X est compact.*

Preuve 1 : supposons que (X,d) ne soit pas compact, donc qu'il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ sans recouvrement fini. On regarde la fonction strictement positive $r(x)$ associée au recouvrement $\mathcal{U}$. Il existe $a > 0$ avec $r(x) > a$ pour tout x : c'est clair si $r = +\infty$ et sinon, on sait que r est continue, donc on regarde la fonction continue $\log(r)$ qui doit, par (2), être bornée, d'où la conclusion. On choisit x_1 quelconque. La boule ouverte $B(x_1, a)$ est incluse dans l'un des ouverts de $\mathcal{U}$ donc ne recouvre pas X. On prend x_2 dans le complémentaire, puis x_3 dans le complémentaire de l'union de $B(x_1, a)$ et de $B(x_2, a)$, et ainsi de suite. La suite (x_n) vérifie $d(x_n, x_m) \geq a$ lorsque $n \neq m$. Considérons maintenant la fonction à valeurs positives ou nulles :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \max(\frac{1}{4}a - d(x, x_n), 0)$$

On remarquera que pour chaque x il y a au plus un n avec $d(x, x_n) < \frac{1}{2}a$. Et x étant fixé, si y est tel que $d(y, x) < \frac{1}{4}a$ et m tel que $d(y, x_m) \leq \frac{1}{4}a$ alors $d(x, x_m) < \frac{1}{2}a$, donc un seul m au plus, toujours le même, est possible. Ce qui signifie que la fonction F restreinte à $B(x, \frac{1}{4}a)$ est de la forme $F(y) = n \cdot \max(\frac{1}{4}a - d(y, x_n), 0)$ pour un certain n, ou identiquement nulle. La fonction F est donc continue et comme $F(x_n) = \frac{n}{4}a$, elle n'est pas bornée supérieurement, contredisant (2). Ansi (2) $\Longrightarrow$ (1) est établi.

Preuve 2 : on suppose que l'on a une suite (x_n) sans suite extraite convergente. Considérons la fonction :

$$f(x) = \liminf d(x, x_n)$$

On a $f(x) > 0$ pour tout $x \in X$ (car $f(x) = 0$ si et seulement si une suite extraite de (x_n) a pour limite x). Il est envisageable que $f(x) = +\infty$ pour un x mais c'est alors vrai pour tous les y car $d(x, x_n) \leq d(x, y) + d(y, x_n)$. Si f est finie elle est continue car on établit facilement $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ pour tous x et y. Donc, par (2) (appliqué à $\log f$), il existe $a > 0$ tel que $f(x) > a$ pour tout x. Ce qui implique que pour tout x il y a au plus un nombre fini d'indices n avec $d(x, x_n) < a$. Soit $n_1 = 1$ et $z_1 = x_1$. Prenons $n_2 > n_1$ suffisamment grand de sorte que $d(z_1, x_{n_2}) \geq a$ et posons $z_2 = x_{n_2}$. Puis prenons $n_3 > n_2$ suffisamment grand de sorte que $z_3 = x_{n_3}$ vérifie à la fois $d(z_1, z_3) \geq a$ et $d(z_2, z_3) \geq a$. Et ainsi de suite. Donc on a une suite extraite (z_n) avec $d(z_n, z_m) \geq a$ lorsque $n \neq m$. On termine alors comme dans l'autre preuve.

Preuve 3 : on suppose que l'on a une suite (x_n) sans suite extraite convergente. Posons $y_1 = x_1$ et soit $y_2 = x_n$ avec n le plus petit tel que $x_n \neq y_1$, puis $y_3 = x_n$ avec n le plus petit tel que $x_n \notin \{y_1, y_2\}$, etc... ce procédé fonctionne car l'ensemble $F = \{x_n, n \in \mathbf{N}\} \subset X$ est infini (sinon on aurait une suite extraite constante donc convergente). Ainsi on a une suite extraite (y_n) composée de points distincts. L'ensemble $F = \{y_n, n \in \mathbf{N}\} \subset X$ est fermé : car si $x \notin F$, il existe $\epsilon > 0$ avec $\forall n\ d(x, y_n) \geq \epsilon$ sinon on construirait une suite extraite convergeant vers x. De plus le même raisonnement montre que pour un n donné il existe $\epsilon > 0$ avec $d(y_n, y_m) \geq \epsilon$ pour tout $m \neq n$. Donc F muni de la topologie induite est discret. Ce qui signifie que n'importe quelle fonction $g : F \to \mathbf{R}$ est continue. En particulier la fonction $g(y_n) = n$. Mais d'après le théorème d'extension de Tietze,[2] la fonction continue g sur le fermé F doit s'étendre en une fonction continue sur X. Contradiction avec (2) puisque g n'est pas bornée. La suite (y_n) dont nous sommes partis n'existe donc pas et X est bien compact.

Preuve 4 : on montre que X est complet et totalement borné. Complet car en utilisant l'existence du complété $X\tilde{}$, si $x_0 \in X\tilde{} \setminus X$ alors $x \mapsto \log d(x, x_0)$ est continue non bornée. Totalement borné car sinon il existe $a > 0$ et une suite (x_n) avec $d(x_n, x_m) \geq a$ pour $n \neq m$ et on conclut comme avant.

2. Théorème de Tietze : sur un espace topologique normal (et tout espace métrique est normal) toute fonction continue sur un fermé s'étend en une fonction continue sur l'espace entier. Pour plus d'infos sur la Topologie, reportez-vous au livre de Monsieur Queffélec, « Topologie, Cours et Exercices ».