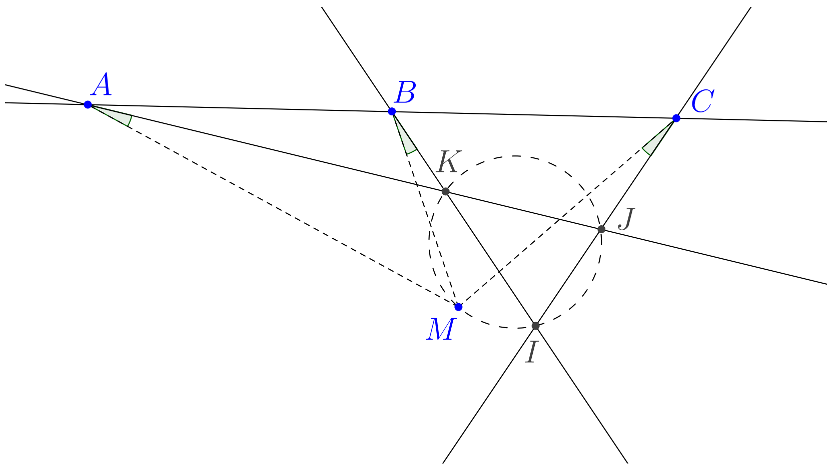
Cocyclicité et Théorème de Simson

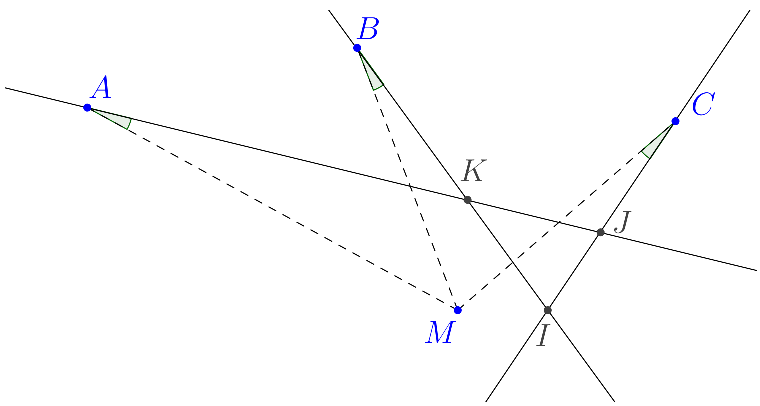
Jean-François Burnol, 28 novembre 2010

Lors de notre dernière séance nous avons examiné le Théorème de Simson, et j'ai fait la promotion d'une approche (que je ne répète pas ici, à part le fait de dire encore à quel point elle était économe et jolie...) basée sur l'algèbre des nombres complexes et la notion de birapport (complexe). J'admets qu'une formule algébrique, c'est en fait comme un dessin, alors je me suis décidé à reprendre la chose de manière plus géométrique, c'est surtout un prétexte pour explorer les possibilités d'« export » du superbe Geogebra que vous m'avez fait découvrir.

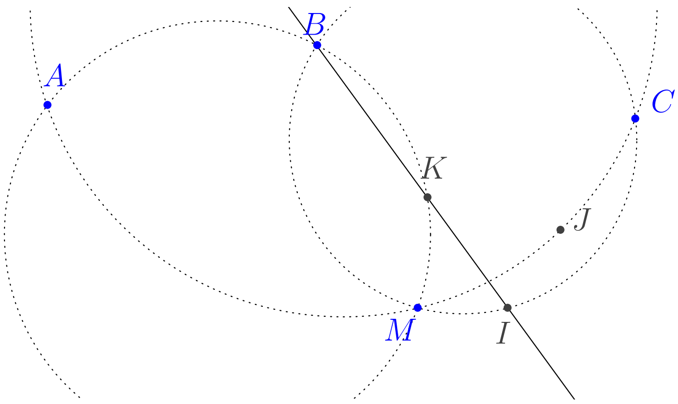
Nous prenons tout d'abord le problème à l'envers. On se donne un point M, et une droite ne passant pas par M, avec A, B, C trois points distincts sur la droite. Puis on se donne un angle de droite α, non nul. On considère la droite a qui passe par A et telle que l'angle de droite (AM, a) vaille α, et de même $(BM, b) = (CM, c) = \alpha$. Les trois droites a, b, c ne sont pas parallèles et s'intersectent en I, J, et K. L'affirmation est : « I, J, K et M sont cocycliques ».



Preuve : dans cette preuve tous mes angles sont des angles de droite. Il y a beaucoup de cercles dissimulés dans la figure : comme $(AM, AK) = (BM, BK)$, les points (M, A, B, K) sont cocycliques ; de même (M, B, C, I) et (M, C, A, J). De plus dans ceci, on n'utilise pas que A, B, C sont alignés. Donc refaisons une figure sans cette hypothèse :



L'idée est la suivante : si A, B, C sont alignés, c'est-à-dire si l'angle (BC, BA) est nul il nous faut montrer $(MI, MK) = (JI, JK)$ (remarquez que le choix de bonnes notations pour les points de la figure aide au raisonnement, ou plutôt au calcul, dès ce point de départ). Donc essayons d'exprimer (BC, BA) en général en fonction de (MI, MK) et de (JI, JK). On écrit : $(BC, BA) = (BC, BI) + (BK, BA)$. Puis, comme (M, B, C, I) sont sur un cercle, $(BC, BI) = (MC, MI)$, et de même $(BK, BA) = (MK, MA)$. À ce stade $(BC, BA) = (MC, MI) + (MK, MA) = (MK, MI) - (MA, MC)$. Finalement $(MA, MC) = (JA, JC)$ car (M, A, C, J) sont cocycliques. Notre formule générale est donc $(BC, BA) = (MK, MI) - (JA, JC) = (MK, MI) - (JK, JI)$.

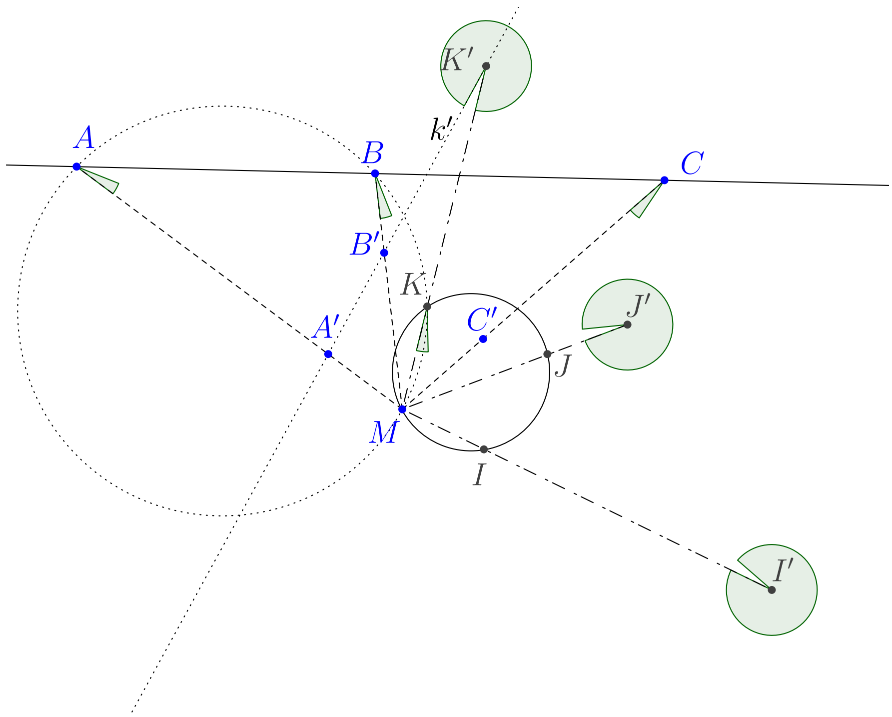


Par conséquent, si l'on revient à notre situation de départ avec A, B, C alignés, on obtient $(MK, MI) = (JK, JI)$: les points M, I, J, K sont cocycliques.

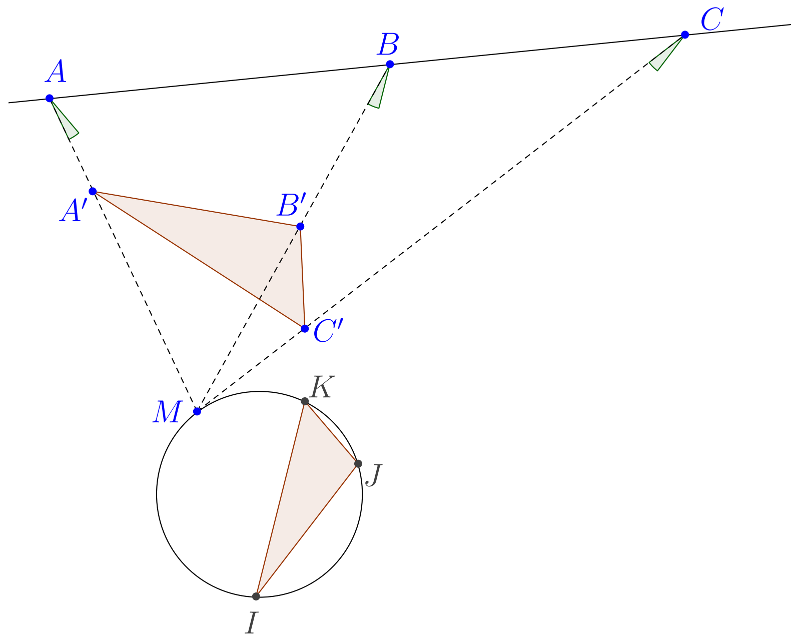
Si notre point de départ avait été un triangle (I, J, K), et un point M en dehors des trois droites définies par le triangle, et des points A, B, C projetés de M sur ces trois droites sous un angle relatif commun (15° dans mes figures), alors la figure ci-dessus avec les cercles en pointillés aurait été valable, donc le calcul aussi, ce qui nous aurait amené à la situation usuelle du Théorème de Simson. Et nous avons donc prouvé : l'alignement de A, B, C équivaut à la cocyclicité de M, I, J, K par la formule $(BC, BA) = (MK, MI) - (JK, JI)$.

Et que se passe-t-il si nous appliquons à tout cela une inversion de pôle M (de rapport quelconque) ? notons A', B', etc...les points-images. Comme B, K, I sont alignés sur une droite ne passant pas par M, B', K' et I' sont sur un cercle passant par M. De même pour A', J' et K' et pour C', I' et J'. De plus comme A, B, K sont sur un cercle passant par M, A', B' et K' sont sur une même droite, notons-la k'. Donc A' est l'intersection de k' et de j', etc...Que peut-on dire de l'angle de droite $\alpha' = (K'M, k')$? une inversion inverse les angles, donc cet angle est l'opposé de l'angle au point K entre la droite KM et le cercle (A, B, K, M), c'est-à-dire l'opposé de (KM, t) avec t la tangente au cercle au point K. Or $\alpha = (AM, AK) = (BM, BK) = (KM, t)$. Donc notre α' est l'opposé du α de départ, et modulo ceci l'inversion échange les rôles des triplets (A, B, C) et (I, J, K) vis-à-vis de M.

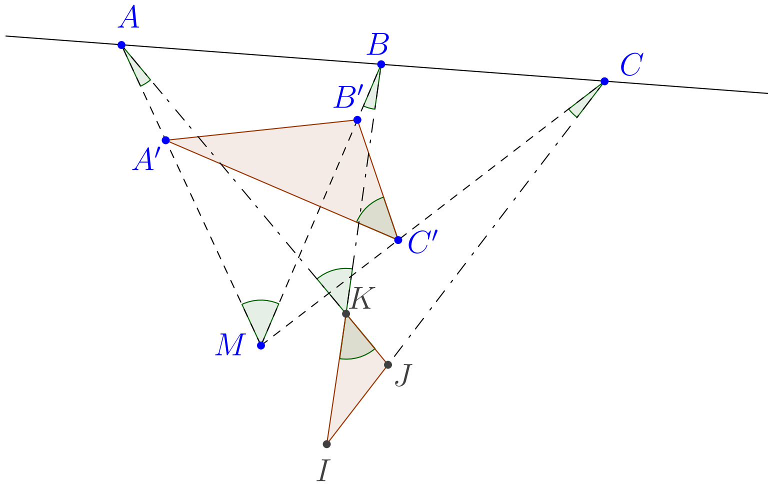
Voir la figure sur la page suivante.



L'examen de différentes figures, comme celle ci-dessous, permet d'émettre une conjecture :

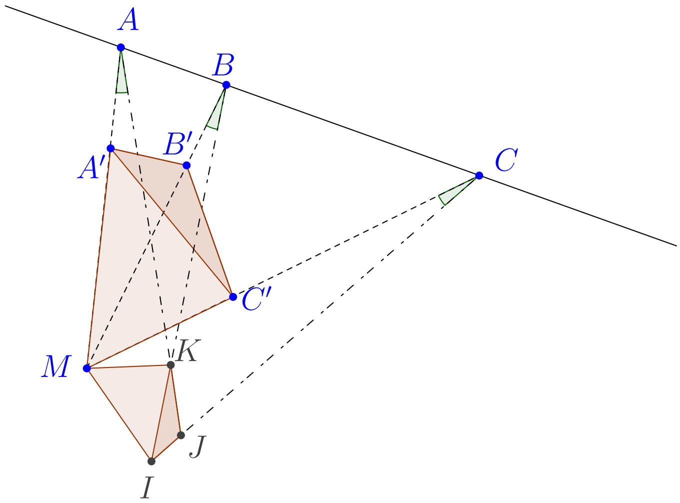


Il semble bien que les triangles IJK et $A'B'C'$ soient semblables : plus précisément que les angles de droite aux sommets de ces triangles soient reliés par les identités : $(KJ, KI) = -(C'B', C'A')$, $(JI, JK) = -(B'A', B'C')$ et $(IK, IJ) = -(A'C', A'B')$. Pouvons-nous prouver ces identités ? La figure suivante va nous y aider :



Comme A, B, C sont alignés, sur une droite ne passant pas par M, leurs images A', B', C' dans une inversion de pôle M sont cocycliques avec M. Donc $(MA', MB') = (C'A', C'B')$. Par ailleurs $(MA', MB') = (MA, MB)$ et $(MA, MB) = (KA, KB)$ puisque (A, B, M, K) sont cocycliques. Finalement $(KA, KB) = (KJ, KI) = -(KI, KJ)$. Les autres identités sont prouvées à l'identique. Deux triangles ayant mêmes angles aux sommets sont semblables, donc $A'B'C'$ et IJK sont semblables par une similitude indirecte.

Mais un examen attentif de ces figures nous révèle plus encore : il semble bien que cette similitude indirecte qui envoie $A'B'C'$ sur IJK soit une similitude de centre M. Cela nous donnerait un énoncé plus fort que le théorème de cocyclicité de I, J, K avec M : toute similitude envoie les cercles sur des cercles et on sait que A', B', C' sont sur un cercle passant par M puisque A, B, C sont sur une droite ne passant pas par M. Donc si M est point fixe, il est aussi sur le cercle passant par I, J, K.

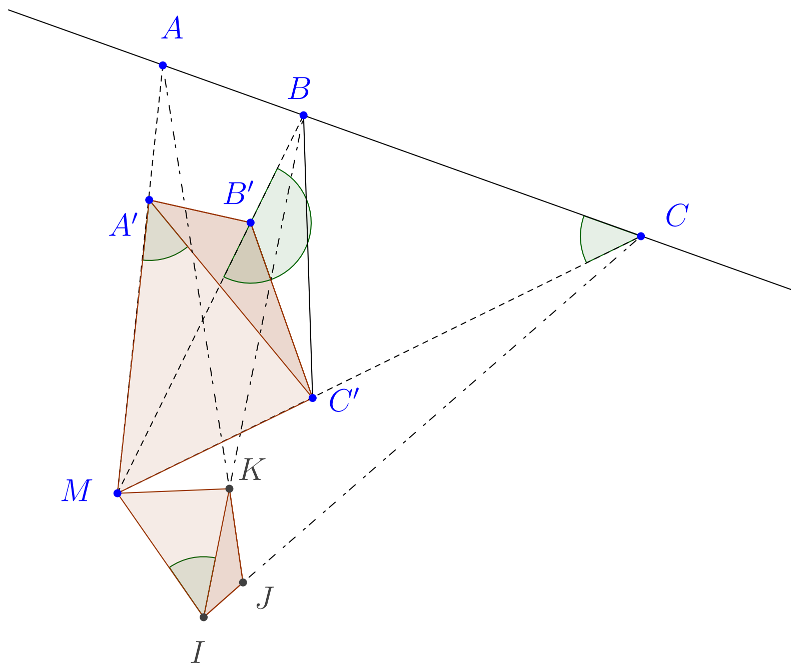


Pour la preuve il nous faut montrer des identités d'angles comme $(IM, IK) = -(A'M, A'C')$.

Voici comment on peut procéder :

$$\begin{aligned}
(IM, IK) &= (IM, IB) \\
&= (CM, CB) && \text{car } (I, M, B, C) \text{ sont cocycliques} \\
&= (CC', CB) \\
&= (B'C', B'B) && \text{car } (C, B, B', C') \text{ sont cocycliques} \\
&= (B'C', B'M) \\
&= (A'C', A'M) && \text{car } (A', B', C', M) \text{ sont cocycliques} \\
&= -(A'M, A'C')
\end{aligned}$$

On a utilisé un nouveau cercle ! En effet on sait que toute inversion f a la propriété que P, Q, $f(P)$, $f(Q)$ sont toujours ou alignés ou cocycliques. Donc (C, B, B', C') sont cocycliques. On montrerait pareillement l'identité d'angle $(KM, KI) = -(C'M, C'A')$. Donc les triangles $A'C'M$ et IKM sont semblables par la même similitude indirecte qui envoie A' sur I, B' sur J, C' sur K. Par conséquent M est le centre de cette similitude.



Traduisons cela avec les nombres complexes. Nous prenons l'origine du plan complexe en M et définissons A', B', C' comme les images de A, B, C par l'inversion dans le cercle unité : $z \mapsto 1/\overline{z}$. Les points A'', B'', C'' symétriques de A', B', C' dans l'axe horizontal auront pour affixes $a'' = a^{-1}$, $b'' = b^{-1}$, $c'' = c^{-1}$. Par ce qui a été montré géométriquement il existe une similitude directe de centre M, donc de la forme $z \mapsto \lambda z$ qui envoie a'' sur l'affixe i de I (ici i n'est pas $\sqrt{-1}$...), b'' sur j et c'' sur k. Autrement dit on a les identités :

$$ai = bj = ck \quad (= \lambda) \, ,$$

ou plus généralement, si M n'est plus supposé d'affixe $m = 0$:

$$(i - m)(a - m) = (j - m)(b - m) = (k - m)(c - m)$$

Sous la forme $\frac{a-m}{b-m} = \frac{j-m}{i-m}$ cela dit que la similitude directe de centre M qui envoie I sur J envoie B sur A.

Démonstration directe via les nombres complexes : j'avoue que si je n'avais pas le résultat géométrique je n'aurais pas pensé à l'obtenir via les complexes, mais nécessité fait force de loi. Nous remettons l'origine au point M, et notons donc a, b, c les affixes de A, B, C, et i, j, k celles de I, J, K. Le fait que K soit sur la droite issue de A faisant un angle α avec la droite AM se traduit par l'existence d'une écriture $k = a - ae^{i\alpha}t$, t réel. Ou encore :

$$\frac{k - a}{ae^{i\alpha}} = \frac{\overline{k} - \overline{a}}{\overline{a}e^{-i\alpha}}$$

De même :

$$\frac{k - b}{be^{i\alpha}} = \frac{\overline{k} - \overline{b}}{\overline{b}e^{-i\alpha}}$$

On élimine $\overline{k}$ pour obtenir la valeur de k :

$$\frac{\overline{a}}{a}e^{-2i\alpha}(k - a) - \frac{\overline{b}}{b}e^{-2i\alpha}(k - b) = \overline{b} - \overline{a}$$

Finalement

$$k = (e^{2i\alpha} - 1)(\overline{b} - \overline{a})\frac{ab}{b\overline{a} - a\overline{b}}$$

Et nous pouvons le mettre sous la forme :

$$kc = abc(1 - e^{2i\alpha})\frac{\begin{vmatrix} 1 & \overline{a} \\ 1 & \overline{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} \\ b & \overline{b} \end{vmatrix}}$$

Supposons donc maintenant que A, B, C sont alignés. Alors c peut s'écrire $c = ta + ub$ avec t et u réels non nuls et $t + u = 1$. Si l'on remplace dans chacun des déterminants la deuxième ligne par t fois la première plus u fois elle-même, le quotient ne bouge pas et on obtient :

$$kc = abc(1 - e^{2i\alpha})\frac{\begin{vmatrix} 1 & \overline{a} \\ 1 & \overline{c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} \\ c & \overline{c} \end{vmatrix}}$$

Or c'est exactement la formule que l'on aurait obtenu pour jb. Donc $kc = jb$ et de la même façon $kc = ia$ (à propos on peut prouver que le nombre complexe $\frac{\overline{b}-\overline{a}}{a\overline{b}-b\overline{a}}$ est le centre du cercle image de la droite AB par $z \mapsto z^{-1}$). Donc il existe un nombre complexe non nul Λ avec $i = \Lambda a^{-1}$, $j = \Lambda b^{-1}$, $k = \Lambda c^{-1}$, ce qui donne une confirmation que I, J, K sont cocycliques avec M (nous avions vu une autre justification plus simple mais moins précise qui consistait à montrer que $(b - a)/(c - a)$ et le birapport de i, j, k, et $m = 0$ avaient un quotient réel non nul, que A, B, C soient alignés ou non).

On peut se donner le challenge suivant : partir de i, j, k sur un cercle passant par l'origine, calculer a, b, c, vérifier sur les formules que $kc = jb = ia$ et en conclure que a, b, c sont alignés. Je le laisse aux personnes intéressées.