À propos du Théorème de Clairaut-Schwarz

Jean-François Burnol, novembre 2008.

Théorème 1 *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, telle que pour un couple d'indices (i,j), $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur U et soient continues au point $P_0 \in U$. Alors elles coïncident au point P_0.*

Preuve : tout d'abord, les dérivées partielles se calculent composante par composante donc on peut d'emblée supposer $p = 1$, autrement dit que f est à valeurs réelles. Ensuite, le résultat est tautologique si $i = j$, et les dérivées partielles se calculent en fixant les x_k pour $k \neq i$, $k \neq j$, ainsi on peut sans perte de généralité supposer plus simplement que l'on a une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ avec U un ouvert (non vide) de $\mathbf{R}^2$, que $G = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $K = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent sur U et sont continues **au point $\boldsymbol{P_0 = (x_0, y_0)}$**. Il s'agit de prouver $G(x_0, y_0) = K(x_0, y_0)$. On pourra même supposer sans perte de généralité $P_0 = (0,0)$.

Supposons $G(0,0) \neq K(0,0)$, alors par exemple $G(0,0) > K(0,0)$ (l'autre cas se traiterait de manière analogue), donc quitte à retirer Lxy à $f(x,y)$, avec $L = \frac{1}{2}(G(0,0)+K(0,0))$ on peut supposer qu'il existe $\delta > 0$ avec $G(0,0) > \delta$ et $K(0,0) < -\delta$. Donc, par la continuité au point $(0,0)$, pour $h > 0$ suffisamment petit et $|x|, |y| \leq h$ on a $G(x,y) > \frac{1}{2}\delta$ et $K(x,y) < -\frac{1}{2}\delta$. Considérons alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ comme fonction de x : cette fonction est nulle pour $x = 0$ et sa dérivée par rapport à x est $G(x,y) > \frac{1}{2}\delta$, donc :

$$\frac{\partial}{\partial y}(f(h,y) - f(0,y)) = \frac{\partial f}{\partial y}(h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) \geq \frac{1}{2}\delta h \ ,$$

et par conséquent, pour $0 \leq y \leq h$ on a :[1]

$$f(h,y) - f(0,y) \geq f(h,0) - f(0,0) + \frac{1}{2}\delta h y$$

En particulier, pour $y = h$:

$$f(h,h) - f(0,h) - f(h,0) + f(0,0) \geq \frac{1}{2}\delta h^2$$

Cependant un raisonnement semblable partant de K montre que l'on a

$$f(h,h) - f(0,h) - f(h,0) + f(0,0) \leq -\frac{1}{2}\delta h^2$$

Contradiction et fin de la preuve.

Le théorème suivant est (évidemment) un corollaire immédiat, mais les hypothèses plus fortes permettent d'aborder la preuve différemment.

Théorème 2 *Soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, telle que pour un couple d'indices (i,j), $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et soient continues sur U. Alors elles coïncident.*

1. il ne s'agit pas d'intégrer mais si une fonction dérivable $f(t)$ vérifie $f' \geq k$, alors $f(t) - kt$ a une dérivée positive donc est une fonction croissante, etc...

Nous faisons les mêmes réductions à $p = 1$, $n = 2$, et on note x et y les deux coordonnées sur $\mathbf{R}^2$. Prenons $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbf{R}^2$ et soit $h_0 > 0$ tel que le carré de côté h_0 et de coin sud ouest en (x_0, y_0) soit inclus dans l'ouvert U. Pour $0 < h < h_0$ considérons :

$$\phi(h) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$$

On écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + v) = \int_0^h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + u, y_0 + v)du$$

Cette expression montre (théorème sur les intégrales avec un paramètre) que le terme de gauche est une fonction continue de v, et en l'intégrant sur l'intervalle $[0, h]$ on obtient :

$$\phi(h) = \int_0^h \left(\int_0^h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + u, y_0 + v)du \right) dv$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour h suffisamment petit on a, pour $0 \leq u \leq h$, $0 \leq v \leq h$:

$$|G(x_0 + u, y_0 + v) - G(x_0, y_0)| \leq \epsilon$$

Donc, en utilisant l'intégrale itérée : $|\phi(h) - G(x_0, y_0)h^2| \leq \epsilon h^2$ et ainsi :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\phi(h)}{h^2} = G(x_0, y_0)$$

Mais l'on a aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u, y_0) = \int_0^h \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + u, y_0 + v)dv$$

$$\int_0^h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + u, y_0) \right) du = \int_0^h \left(\int_0^h \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + u, y_0 + v)dv \right) du$$

$$\phi(h) = \int_0^h \left(\int_0^h K(x_0 + u, y_0 + v)dv \right) du$$

On obtient alors :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\phi(h)}{h^2} = K(x_0, y_0)$$

Ainsi

$$G(x_0, y_0) = K(x_0, y_0)$$