Moyenne

Jean-François Burnol, 17 février 2013.

Je considère une suite réelle ou complexe (u_n), et se
Ce [1]

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\ .$$

On sait que si la suite (u_n) converge vers $\mathcal{L}$ alors la suite (v_n) aussi. Mais que se passe-t-il si on ne suppo
peut-on dire quelque cho

Théorème. *Pour toute suite réelle (u_n) on a l'inégalité dans la droite réelle complétée par $\pm\infty$:*

$$\liminf u_n \leqslant \liminf v_n \leqslant \limsup v_n \leqslant \limsup u_n\ .$$

Preuve : Il suffira de montrer $\liminf u_n \leqslant \liminf v_n$. Car en appliquant cette inégalité à la suite $-u_n$ (donc aussi $v_n \to -v_n$) on obtiendra $\limsup v_n \leqslant \limsup u_n$.[2]

Soit $\mathcal{A} = \liminf u_n$. Il n'y a rien à prouver si $\mathcal{A} = -\infty$. Ensuite, on va distinguer le cas $\mathcal{A} < \infty$ du cas $\mathcal{A} = \infty$. Si $\mathcal{A} < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathcal{N}$ tel que $n \geqslant \mathcal{N} \implies u_n \geqslant \mathcal{A} - \varepsilon$.[3] Donc

$$n \geqslant \mathcal{N} \implies v_n - (\mathcal{A} - \varepsilon) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - (\mathcal{A}-\varepsilon)) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\mathcal{N}-1}(u_k - (\mathcal{A}-\varepsilon))\ ,$$

puis, pour n suffisamment grand : $v_n - (\mathcal{A} - \varepsilon) \geqslant -\varepsilon$, donc $v_n \geqslant \mathcal{A} - 2\varepsilon$, $\liminf v_n \geqslant \mathcal{A} - 2\varepsilon$, et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire $\liminf v_n \geqslant \mathcal{A}$.

---

1. par rapport à ma précédente note, ici on revient aux indice 1 à n.
2. je rappelle $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$ pour toute suite réelle.
3. je rappelle que $\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geqslant n} u_m$, donc pour n grand $\inf_{m\geqslant n} u_m \geqslant \mathcal{A} - \varepsilon$, c'e $m \geqslant n \implies u_m \geqslant \mathcal{A} - \varepsilon$.

Venons-en à $A = \infty$. Alors pour tout X, il existe N tel que $n \geqslant N \implies u_n \geqslant X$. Donc, pour $n \geqslant N$, $v_n - X \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1}(u_k - X)$, et ensuite, pour n suffisamment grand $v_n - X \geqslant -1$. Donc $v_n \geqslant X - 1$, $\liminf v_n \geqslant X - 1$, $\liminf v_n = +\infty$.

On remarque que la version usuelle du Théorème de Ce
corollaire de cet énoncé renforcé.

Qu'en e
utiliser d'inégalité limsup ou liminf.
Néanmoins on peut prouver un énoncé intére

Théorème. *Pour toute suite complexe bornée (u_n) le*
rence de se *(v_n) sont dans l'envelo*
de *(u_n).*

Preuve : Remarquons tout d'abord que si $\forall n\ |u_n| \leqslant K$ alors $\forall n\ |v_n| \leqslant K$. Donc si (u_n) e (v_n) l'e
d'adhérence (finie

Je rappelle que l'envelo
de
a une équation du ty $\Re(wz) \leqslant t$, pour un certain w complexe et un réel t. Il s'agit donc de prouver que si $\Re(wz) \leqslant t$ pour toute le z de la suite (u_n), alors il en e
pour toute z' de la suite (v_n). Soit $\varepsilon > 0$. S'il existait un nombre infini d'indice n tel $\Re(wu_n) \geqslant t + \varepsilon$, on pourrait extraire une suite convergente, et la limite serait une valeur d'adhérence z vérifiant $\Re(wz) \geqslant t + \varepsilon$, ce qui e

existe un $\mathcal{N}$ tel que $\Re(wu_n) < t+\varepsilon$ pour tous le $n > \mathcal{N}$. Il en ré

$$n > \mathcal{N} \implies n\Re(wv_n) < \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \Re(wu_k) + (n-\mathcal{N})(t+\varepsilon) < \mathcal{C} \quad + n(t+\varepsilon)$$

On divise par n et pour n suffisamment grand on obtient $\Re(wv_n) \leqslant \varepsilon + t + \varepsilon$. Donc aussi pour toute limite z' d'une suite extraite, et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a vérifié $\Re(wz') \leqslant t$ pour toute valeur d'adhérence z' de la suite (v_n).

D'une manière générale on a[4] (avec no

le

$$u_n = nv_n - (n-1)v_{n-1} = v_{n-1} + n(v_n - v_{n-1})$$

Partant de n'importe quelle suite (v_n), $v_0 = 0$, cette formule définit une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que le v_n en soient le

On voit donc que si la suite (v_n) converge, la convergence de (u_n) dé $n(v_n - v_{n-1})$. Il suffit de s'arranger pour faire faire à ce $n(v_n - v_{n-1})$ ce que l'on veut.

Par exemple imaginons que je modifie la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ de la manière suivante. D'abord $v_0 = 0$, puis $v_1 = 1$, puis pour ne pas dé 1 on fait $v_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $v_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ..., $v_{10} = 1 - (\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10}) \approx -0{,}929$, mais $v_{11} = v_{10} + \frac{1}{11}$ pour re

de -1, ensuite on continue à additionner jusqu'à se rapprocher de $+1$ mais en faisant demi-tour au lieu de dé

suite (u_n) associée pour laquelle (v_n) en e

donc définie par $u_n = v_{n-1}+1$ dans le $u_n = v_{n-1}-1$

dans le

On il e

mentait mon salaire que le v_n en phase ascendante ont tout l'inter-

4. on po $v_0 = 0$ pour que la formule fonctionne avec $n = 1$.

valle $[-1,+1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence, et que le v_n en
phase de $[-1,+1]$ comme adhérence. Par conséquent l'ensemble de (u_n) e $[-2,+2]$, on a $\limsup u_n = +2$, $\liminf u_n = -2$, tandis que $\limsup v_n = +1$, $\liminf v_n = -1$.

Je passe maintenant à un autre exemple qui a été motivé par ce qui précède. Pour avoir une suite (v_n) plus ex
mais avec un comportement analogue, on pourrait prendre :

$$v_n = \sin\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Ou encore $v_n = \sin(\log n)$, ou $v_n = co$ (et $v_0 = 0$). Il se trouve que lorsque l'on étudie le u_n qui corre
une petite cho
pourrez comprendre en lisant la suite, et qui m'a amené au final à prendre comme point de dé
directement une suite u_n trè

$$\boxed{u_n = co}$$

Tout d'abord l'ensemble de $[-1,+1]$. En effet soit $x \in [-1,+1]$, $\varepsilon > 0$, et $\vartheta = \mathrm{Arcco}$ $\in [0,+\pi]$. Soit N avec $N^{-1} < 2\varepsilon$. On a, pour $n \geqslant N$, $\log n < \log(n+1) < \log n + \frac{1}{n} < \log n + 2\varepsilon$. Prenons maintenant un entier k tel que $2\pi k > \log N + \varepsilon$. Regardons alors l'intervalle $[2\pi k+\vartheta-\varepsilon, 2\pi k+\vartheta+\varepsilon]$. Soit n_k le plus grand indice avec $\log n_k < 2\pi k+\vartheta-\varepsilon$. Donc $n_k \geqslant N$. Donc $\log(n_k+1) < \log n_k + 2\varepsilon < 2\pi k+\vartheta+\varepsilon$. Et par définition de n_k on a aussi $\log(n_k+1) \geqslant 2\pi k + \vartheta - \varepsilon$. Donc $\left|\log(n_k+1) - (2\pi k + \vartheta)\right| \leqslant \varepsilon$, et par l'inégalité de
en passant aux co

$$|u_{n_k+1} - x| \leqslant \varepsilon\ .$$

On peut ainsi construire une suite extraite de (u_n) qui converge vers x. CQFD.

Je vais maintenant déterminer une bonne approximation aux moyenne de Ce (v_n). La tâche paraît impo
elle devient pre

$$u_n = \Re(e^{i\log n}) = \Re(n^i)$$

Il s'agit de calculer approximativement $1+2^i+\cdots+n^i$. Comme d'habitude le mieux e
faire le remplacement : $n^i \longrightarrow \int_n^{n+1} t^i\,dt$. Quelle e
par l'inégalité de
variable réelle à valeurs complexe,[5] on a

$$n \leqslant t \leqslant n+1 \implies |t^i - n^i| \leqslant \frac{1}{n}(t-n)$$

$$\left| n^i - \int_n^{n+1} t^i\,dt \right| \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}(t-n)\,dt = \frac{1}{2n}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} k^i - \int_1^{n+1} t^i\,dt \right| = \left| n w_n - \frac{(n+1)^{i+1} - 1}{i+1} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_n$$

$$\left| n w_n - \frac{n^{i+1}}{i+1} \right| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{H}_n + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

J'ai noté $\mathcal{H}_n$ le nombre harmonique, j'ai noté $w_n = (1+2^i+\cdots+n^i)/n$ et j'ai utilisé au passage la majoration $|(n+1)^{i+1} - n^{i+1}| \leqslant |i+1| = \sqrt{2}$ qui provient de l'inégalité complexe de

On a donc tout bonnement pour no

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{co} \qquad = \Re\left(\frac{n^i}{i+1}\right) + O\left(\frac{\log n}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{co} \qquad \frac{\pi}{4}) + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

Le terme d'erreur tendant vers zéro, le
suite (v_n) sont donc celle $\quad (\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{co} \qquad \frac{\pi}{4}))$. Et par le même

5. je rappelle que la dérivée de $t \mapsto t^i$ e $\quad t \mapsto i t^{i-1}$, qui a pour module t^{-1}.

raisonnement que celui fait pour co , il s'agit donc de l'intervalle $[-1/\sqrt{2},+1/\sqrt{2}]$.

Si on était re n^i on aurait vu que l'ensemble de leurs valeurs d'adhérence e le cercle unité, et que le valeurs d'adhérence de w_n e le cercle de rayon $1/\sqrt{2}$: il se trouve bien dans l'envelo