Trois applications du théorème de Baire

Jean-François Burnol, 19 janvier et 6 février 2010

Un gros *mea culpa* est nécessaire, car lors de la dernière séance j'ai imprudemment lancé à la cantonade que j'allais produire une fonction f partout dérivable dont la dérivée f' ne serait nulle part localement bornée. Pris de gros doutes après-coup, j'ai en effet été remis dans le droit chemin par le Professeur Queffélec : c'est impossible et son argument suit.

Comme f est partout dérivable sur l'intervalle $I = [a, b]$, elle est continue. Posons :

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

Quitte à prendre n suffisamment grand, et à remplacer b par une valeur plus petite, on peut supposer que les f_n sont définies sur I. Elles sont continues et f' est leur limite simple.

Dans la suite, nous considérons simplement une limite simple g de fonctions continues f_n, sur un intervalle $[a, b]$. Soit $M(x) = \sup |f_n(x)|$. Pour chaque x on a $M(x) < \infty$ car la suite $(f_n(x))$ converge. Posons alors

$$F_k = \{x \ , M(x) \leq k\} = \bigcap_n \{x \ , |f_n(x)| \leq k\}$$

Comme intersection de fermés (continuité des f_n), l'ensemble F_k est fermé. Et :

$$[a, b] = \bigcup_{k \geq 1} F_k$$

Si les F_k étaient tous d'intérieurs vides, leur union le serait aussi (théorème de Baire). Donc il existe un F_k qui est d'intérieur non vide, et par conséquent il existe $c < d$ dans $[a, b]$ avec $]c, d[\in F_k$ (on peut bien sûr avoir aussi a ou b dans cet intérieur, mais pour des raisons de notation, je les laisse tomber). Mais alors

$$c < x < d \implies \forall n \ |f_n(x)| \leq k \implies |g(x)| \leq k$$

Donc la fonction limite g est bornée sur $]c, d[$: elle n'est donc pas « nulle part localement non bornée ».

Comme deuxième application du théorème de Baire, montrons la chose suivante : la fonction $\mathbf{1_Q}$ indicatrice des rationnels de $[0, 1]$ n'est pas limite simple d'une suite de fonctions continues. En effet supposons

$$\forall x \quad \mathbf{1_Q}(x) = \lim f_n(x)$$

avec les f_n continues. Pour chaque $k \geq 1$, notons $A_k = \bigcap_{n \geq k} f_n^{-1}([-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}])$. Chaque A_k est une intersection de fermés, donc un fermé. De plus si x est dans A_k alors $\mathbf{1_Q}(x) = \lim f_n(x)$ ne peut valoir que 0, donc x est irrationnel ; ainsi A_k est d'intérieur vide (car les rationnels sont partout denses). De même avec $B_k = \bigcap_{n\geq k} f_n^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$. Ce sont tous des fermés d'intérieurs vides. Mais $[0,1] = \bigcup_{k\geq 1}(A_k \cup B_k)$, ce qui contredit le théorème de Baire.

Par contre il est possible de trouver des fonctions continues $f_{n,m}$ avec

$$\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \lim_n \lim_m f_{n,m}(x)$$

pour tout x. Je le laisse en exercice.

Troisième application : un espace vectoriel normé complet $(E, \|\cdot\|)$ (sur les réels ou les complexes) ne peut pas avoir une base algébrique infinie dénombrable. Par l'absurde : si $(e_0, e_1, \dots)$ est une telle base, considérons l'espace E_n de dimension $n+1$ engendré par $e_0, \dots, e_n$. L'espace vectoriel normé $(E_n, \|\cdot\|)$ est de dimension finie, donc il est nécessairement complet. Tout sous-espace métrique complet d'un espace métrique est automatiquement fermé dans icelui. Donc E_n est fermé. Par le théorème de Baire, si $E = \cup E_n$ était complet, l'un des E_n, disons E_N serait d'intérieur non vide. Il existerait donc $x \in E_N$ et $a > 0$ tel que $\|y - x\| < a \implies y \in E_N$. Soit $z \in E$ avec $\|z\| < a$. Alors $x + z$ est dans E_N donc z l'est aussi. Donc E_N contient la boule ouverte de rayon $a > 0$, centrée en le vecteur nul, et par dilatation, E_N contient toutes les boules ouvertes centrées en 0. Donc $E_N = E$, ce qui est faux.

Une quatrième application classique est la suivante : si f de classe C^∞ sur les réels vérifie $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists n f^{(n)}(x) = 0$, alors f est un polynôme. Vous trouverez ceci dans de nombreux recueils de problèmes niveau agrégation.

Preuve du théorème de Baire

Tous les livres de Topologie en donnent une preuve, en voici néanmoins pour être complet une rédaction. On va montrer le Théorème sous la forme suivante : dans un espace métrique complet X, toute intersection dénombrable d'ouverts denses U_n est un sous-ensemble dense de X (en passant au complémentaire on a l'énoncé avec les unions dénombrables de fermés d'intérieurs vides).

Soit $x = x_0 \in X$. Soit $\epsilon_0 > 0$. Il existe, par densité de U_1, $x_1 \in U_1$ avec $d(x_1, x) \leq \epsilon_0$. Comme U_1 est un ouvert, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que la boule **fermée** de centre x_1 et de rayon $2\epsilon_1$ est dans U_1. De plus on peut imposer $\epsilon_1 \leq \frac{1}{2}\epsilon_0$. On prouve alors par récurrence l'existence de x_n et de ϵ_n avec :

1. $x_{n+1} \in U_{n+1}$ et $d(x_{n+1}, x_n) \leq \epsilon_n$,
2. U_{n+1} contient $\{y,\ d(y, x_{n+1}) \leq 2\epsilon_{n+1}\}$,
3. $0 < \epsilon_{n+1} \leq \frac{1}{2}\epsilon_n$.

On a par 1 $d(x_{n+m+1}, x_n) \leq \epsilon_{n+m} + d(x_{n+m}, x_n)$, donc par récurrence $d(x_{n+m+1}, x_n) \leq \epsilon_{n+m} + \cdots + \epsilon_n < 2\epsilon_n$. Ainsi, par le critère de Cauchy $z = \lim x_n$ existe. De plus $d(z, x_n) \leq 2\epsilon_n$. En particulier $d(z, x) \leq 2\epsilon_0$. Par 2 on a $z \in U_n$ pour $n \geq 1$. Donc z est dans l'intersection des U_n et $d(z, x) \leq 2\epsilon_0$ est arbitrairement petit.