Asymptotique de certaines séries et intégrales

Jean-François Burnol, octobre 2009

1 Séries

Théorème 1 *Soit g positive décroissante avec $\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = +\infty$. Alors :*

$$\sum_{n=1}^{N} |\sin(n)| g(n) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} g(n)$$

Plus généralement soit f Riemann-intégrable et L-périodique avec $L \notin \mathbf{Q}$. Alors :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} f(n)g(n)}{\sum_{n=1}^{N} g(n)} = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$$

Lorsque $g(n) = 1$ cet énoncé équivaut (expliquez pourquoi) à dire que si α est irrationnel et f une fonction 1-périodique raisonnable (continue par morceaux, ou même seulement Riemann-intégrable) alors (c'est le **Théorème de Weyl**) :

$$\lim \frac{f(\alpha) + f(2\alpha) + \cdots + f(N\alpha)}{N} = \int_0^1 f(t)\,dt$$

Je suppose que la variante proposée ici est aussi très connue, quoi qu'il en soit nous allons la prouver en suivant la preuve usuelle du Théorème de Weyl. Je suppose donc que vous en êtes des familiers ce qui me permet d'être un peu concis. [1]

Supposons tout d'abord f continue. Soit $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{-K\leq k\leq K} c_k e^{2\pi i k\frac{x}{L}}$ avec $\forall x\, |f(x) - P(x)| \leq \epsilon$. Pour fixer les idées on peut prendre les polynômes de Fejér, donc $c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$. Pour chaque k entier non nul et pour tout $M \in \mathbf{N}$: $\left|\sum_{n=1}^{M} e^{2\pi i k\frac{n}{L}}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{k\pi}{L})|}$, et $\frac{k}{L} \notin \mathbf{N}$ par l'irrationalité de L. On en déduit par sommation par parties (Abel) $\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\frac{n}{L}} g(n)\right| \leq \frac{g(1)}{|\sin(\frac{k\pi}{L})|}$ puis :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} f(n)g(n) - c_0 \sum_{n=1}^{N} g(n)\right| \leq \epsilon \sum_{n=1}^{N} g(n) + 2Kg(1) \max_{1\leq|k|\leq K}\left(\frac{|c_k|}{|\sin(\frac{k\pi}{L})|}\right)$$

D'où le résultat.

Pour f Riemann-intégrable, on peut la supposer à valeurs réelles, et on sait que pour tout $\epsilon > 0$ il existe ϕ et ψ continues L-périodiques avec $\phi(t) \leq f(t) \leq \psi(t)$ et $\int_0^L \phi(t)\,dt \geq \int_0^L f(t)\,dt - \epsilon$, $\int_0^L \psi(t)\,dt \leq \int_0^L f(t)\,dt + \epsilon$. Ce qui conclut la preuve. [2]

1. c'est surtout qu'au départ je rédigeais à l'intention d'un collègue d'où un style un peu elliptique, je vous rassure cela s'arrange après. Enfin, je crois...
2. Le moins elliptique c'est encore pour plus tard...

Note : le cas $L \in \mathbf{Q}$ correspond à une suite $f(n)$ périodique, soit T la plus petite période entière alors il est facile de voir :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N f(n)g(n)}{\sum_{n=1}^N g(n)} = \frac{1}{T}(f(1)+\cdots+f(T))$$

Ainsi si l'on ne savait pas $\pi \notin \mathbf{Q}$ on aurait tout de même un résultat $\sum_{n=1}^N |\sin(n)|g(n) \sim C\sum_{n=1}^N g(n)$ mais avec un C inconnu !

2 Intégrales

Théorème 2 *Soit g une fonction positive décroissante avec $\int_0^\infty g(t)\,dt = +\infty$. Alors*

$$\int_0^T |\sin(t)|g(t)\,dt \sim \frac{2}{\pi}\int_0^T g(t)\,dt$$

Plus généralement si $f(t)$ est une fonction à valeurs complexes, L-périodique et Lebesgue-intégrable, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T f(t)g(t)\,dt}{\int_0^T g(t)\,dt} = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$$

Preuve : posons $c = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$, et soit $k = f - c$ alors

$$\frac{\int_0^T f(t)g(t)\,dt}{\int_0^T g(t)\,dt} = c + \frac{\int_0^T k(t)g(t)\,dt}{\int_0^T g(t)\,dt}$$

En invoquant la seconde formule de la moyenne, il vient :

$$\left|\int_0^T k(t)g(t)\,dt\right| \le g(0)\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t k(u)\,du\right|$$

Mais $t \mapsto \int_0^t k(u)\,du$ est une fonction (continue) L-périodique, donc au final :

$$\left|\frac{\int_0^T f(t)g(t)\,dt}{\int_0^T g(t)\,dt} - c\right| \le g(0)\frac{\sup_{0\le t\le L}|\int_0^t (f(u)-c)\,du|}{\int_0^T g(t)\,dt} \le g(0)\frac{2\int_0^L |f(t)|\,dt}{\int_0^T g(t)\,dt} \tag{1}$$

À la fin on peut être un chouïa moins brutal dans la majoration et écrire $\int_0^L |f(t)|\,dt + \left|\int_0^L f(t)\,dt\right|$ à la place de $2\int_0^L |f(t)|\,dt$. En particulier si $c = 0$ on aura $\int_0^L |f(t)|\,dt$. Bref, on a donc le théorème voulu.

3 Abel à gogo

Nous avons considéré des séries $\sum a_n g_n$ avec (g_n) une suite positive décroissante telle que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = +\infty$. Nous avions $a_n = f(n)$ avec f Riemann-intégrable et L-périodique avec $L \notin \mathbf{Q}$, et nous avons montré $\sum_{n=1}^{N} a_n g_n \sim c \sum_{n=1}^{N} g_n$ avec $c = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$. Notre technique a consisté essentiellement à imiter la preuve du célèbre **Théorème de Weyl**, qui équivaut avec nos notations à

$$\lim \frac{f(1) + f(2) + \cdots + f(N)}{N} = c = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$$

Ici je vais montrer qu'au lieu d'imiter la preuve nous aurions pu aussi bien simplement en exploiter l'énoncé.

Théorème 3 *Si $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite positive décroissante et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe convergeant en moyenne de Cesàro vers c, alors :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n = +\infty \implies \lim \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n g_n}{\sum_{n=1}^{N} g_n} = c = \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N}$$

Pour la preuve nous notons $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Par sommation par parties (Abel) :

$$\sum_{n=1}^{N} a_n g_n = \sum_{n=1}^{N-1} A_n(g_n - g_{n+1}) + A_N g_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n}{n} n(g_n - g_{n+1}) + \frac{A_N}{N} N g_N$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n g_n - c\sum_{n=1}^{N} g_n = \sum_{n=1}^{N-1} (\frac{A_n}{n} - c)n(g_n - g_{n+1}) + (\frac{A_N}{N} - c)N g_N$$

Soit $\epsilon > 0$ et M tel que $n \geq M \implies \left|\frac{A_n}{n} - c\right| \leq \epsilon$. Alors avec $K_M = \sum_{n=1}^{M-1} \left|\frac{A_n}{n} - c\right| n(g_n - g_{n+1})$ on a pour tout $N > M$:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n g_n - c\sum_{n=1}^{N} g_n\right| \leq K_M + \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon n(g_n - g_{n+1}) + \epsilon N g_N = K_M + \epsilon \sum_{n=1}^{N} g_n$$

Donc

$$\operatorname*{limsup}_{N\to\infty} \left|\frac{\sum_{n=1}^{N} a_n g_n}{\sum_{n=1}^{N} g_n} - c\right| \leq \epsilon$$

Ce qui conclut la preuve puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire.

Théorème 4 *Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite positive décroissante avec $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ et $g_n > 0$ pour tout n. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe convergeant en moyenne de Cesàro vers c.*

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ *est convergente. De plus, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire*

$$Ng_N = \mathcal{O}(\sum_{n=N}^{\infty} g_n)$$

on a

$$\lim \frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n g_n}{\sum_{n=N}^{\infty} g_n} = c = \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N}$$

À nouveau écrivons $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ et faisons une sommation par parties, pour $N \leq M$:

$$\sum_{n=N}^{M} a_n g_n = -A_{N-1} g_N + \sum_{n=N}^{M-1} A_n (g_n - g_{n+1}) + A_M g_M$$

Tout d'abord il existe D avec $|A_n| \leq nD$ pour $n \geq 1$. Donc

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n g_n \right| \leq (N-1) D g_N + \sum_{n=N}^{M-1} nD(g_n - g_{n+1}) + MDg_M = 2(N-1)Dg_N + D \sum_{n=N}^{M} g_n$$

Il est classique et facile que $ng_n \to 0$ puisque la suite g_n est décroissante positive et la série converge ($mg_{2m} \leq g_{m+1} + \cdots + g_{2m}$, etc...). Ainsi le critère de Cauchy est vérifié pour la convergence de la série de terme général $a_n g_n$. C'est le premier point. Le deuxième point, c'est de se donner $\epsilon > 0$ et de choisir alors N_0 tel que $\forall n \geq N_0$ $|A_n - nc| \leq n\epsilon$. Alors pour tout $N > N_0$ et $M \geq N$:

$$\sum_{n=N}^{M} (a_n - c) g_n = -(A_{N-1} - (N-1)c) g_N + \sum_{n=N}^{M-1} (A_n - nc)(g_n - g_{n+1}) + (A_M - Mc) g_M$$

$$\left| \sum_{n=N}^{M} (a_n - c) g_n \right| \leq (N-1)\epsilon g_N + \sum_{n=N}^{M-1} n\epsilon (g_n - g_{n+1}) + M\epsilon g_M = \epsilon(2(N-1) g_N + \sum_{n=N}^{M} g_n)$$

On passe à la limite pour $M \to \infty$:

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n g_n - c \sum_{n=N}^{\infty} g_n \right| \leq \epsilon(2Ng_N + \sum_{n=N}^{\infty} g_n)$$

Par l'hypothèse supplémentaire il existe une constante C finie avec $Ng_N \leq C \sum_{n=N}^{\infty} g_n$.

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n g_n - c \sum_{n=N}^{\infty} g_n \right| \leq \epsilon(2C+1) \sum_{n=N}^{\infty} g_n$$

Et finalement

$$\limsup_{N \to \infty} \left| \frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n g_n}{\sum_{n=N}^{\infty} g_n} - c \right| \leq (2C+1)\epsilon$$

ce qui termine la preuve.

L'hypothèse supplémentaire empêche la suite g_n de décroître trop vite. Par exemple $g_n = \frac{1}{n!}$ ne convient pas. **Exercice :** Donnez des exemples de séries $\sum a_n \frac{1}{n!}$ pour lesquelles la conclusion du théorème est en effet prise en défaut.