Passerelle vers l'Agrégation Interne (Algèbre/Géométrie) – Feuille 5

Lorsque l'on veut construire un exercice d'étude de fonction, avec $f(x) = x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3$ une fonction polynomiale cubique, il est commode d'imposer d'avoir des racines entières $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Cependant les racines du polynôme dérivé nécessitent souvent une racine carrée. On peut donc se demander comment construire les polynômes miraculeux, tels que :

$$P := X^3 - 6X^2 - 495X + 500 = (X+20)(X-1)(X-25)\ ,$$

qui non seulement a des racines entières, mais est tel que son polynôme dérivé P' a **aussi** des racines entières :

$$P' = 3X^2 - 12X - 495 = 3(X-15)(X+11)\ .$$

Peut-on décrire tous ces polynômes ?

1. On pose $D(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$. Montrer que $P = (X-a)(X-b)(X-c)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ est tel que P' a ses racines dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si $D(a, b, c)$ est un carré dans $\mathbb{Z}$.
2. Que vaut $D(a+\delta, b+\delta, c+\delta)$? Dorénavant on suppose $a = 0$, et on s'intéresse donc aux solutions entières de l'équation

$$b^2 + c^2 - bc = d^2 \qquad \textbf{[1]}$$

3. Donner une interprétation de l'équation précédente en termes de triangles. Rappeler comment on engendre les triplets Pythagoriciens.
4. On s'intéresse à l'ellipse $x^2 + y^2 - xy = 1$. Déterminer ses axes et ses sommets et dessiner la, ainsi que la tangente au point $(1, 1)$.
5. On cherche une paramétrisation rationnelle de l'ellipse. À quoi correspondent λ et t dans les équations $(x, y) = \lambda(2-t, 2+t) + (-1, -1)$.
6. Montrer que (x, y) est un point de l'ellipse distinct de $(-1, -1)$ et à coordonnées rationnelles si et seulement si

$$(x, y) = \left(\frac{4-4t-3t^2}{4+3t^2}, \frac{4+4t-3t^2}{4+3t^2}\right) \qquad \text{avec } t \in \mathbb{Q}$$

   Comment s'exprime t en fonction de x et de y ? Pour quelles valeurs de t a-t-on $0 < x < y$? à quoi correspond $(x, y) \mapsto (-x, -y)$?

7. On suppose $t = \frac{p}{q}$ sous forme réduite, c'est-à-dire $q \geqslant 1$, $(p, q) = 1$. Posons $B(t) = 4q^2 - 4pq - 3p^2$, $C(t) = 4q^2 + 4pq - 3p^2$, $D(t) = 4q^2 + 3p^2$. Ainsi $(B(t), C(t), D(t))$ est une solution entière de l'équation **[1]**, mais il y a une subtilité c'est que ce n'est pas nécessairement une solution primitive, c'est-à-dire une solution avec $\delta(t) := \mathrm{pgcd}(B(t), C(t), D(t)) = 1$. On va déterminer ce pgcd.
   (a) Soit l un nombre premier divisant $\delta(t)$. Montrer que l divise $8pq$.
   (b) Montrer que si $l = 2$ alors p est pair et q impair.
   (c) Montrer que si $l \neq 2$ alors $l = 3$ et divise q.
   (d) En déduire que $\delta(t) = 2^\alpha 3^\beta$ pour certains α, β.
   (e) Montrer que si $\beta > 0$, alors en fait $\beta = 1$. On écrira $q = 3q_1$, et on calculera $\frac{1}{3}D$ et on montrera qu'il n'est pas divisible par 3.
   (f) Si p est impair on a vu $\alpha = 0$. On suppose p pair (donc q est impair), et on écrit $p = 2p_1$. Montrer que si p_1 est pair alors $\frac{1}{4}D = q^2 + 3p_1^2$ est impair donc $\alpha = 2$. Montrer que si p_1 est impair alors $\frac{1}{4}B \equiv \frac{1}{4}C \equiv (q - p_1)^2 \equiv 0 \mod 4$, et aussi $\frac{1}{4}D \equiv 0 \mod 4$. En déduire $\alpha \geqslant 4$. Montrer $\alpha = 4$ en considérant $B + C + 2D$.

   En conclusion $\delta(t) \in \{1, 3, 4, 12, 16, 48\}$ suivant les classes de congruence de p modulo 4 et de q modulo 3. Faites un tableau récapitulant la situation. Montrer que $\delta(t)^{-1}B(t)$ et $\delta(t)^{-1}D(t)$ sont premiers entre eux, ainsi que $\delta(t)^{-1}C(t)$ et $\delta(t)^{-1}D(t)$.
8. En bonus de la question précédente pourquoi est-il vrai que l'on a toujours $\mathrm{pgcd}(4q^2-4pq-3p^2, 4q^2+4pq-3p^2) = \mathrm{pgcd}(4q^2-4pq-3p^2, 4q^2+4pq-3p^2, 4q^2+3p^2)$?
9. Montrer que les solutions entières de l'équation **[1]**, sont soit de la forme $(j, j, \pm j)$ avec $j \in \mathbb{Z}$ soit (exclusif) de la forme :

$$b = k\,\frac{1}{\delta}(4q^2 - 4pq - 3p^2)$$
$$c = k\,\frac{1}{\delta}(4q^2 + 4pq - 3p^2)$$
$$d = k\,\frac{1}{\delta}(4q^2 + 3p^2)$$

   avec $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 1$ et $(p, q) = 1$, et $\delta = \delta(\frac{p}{q})$ comme défini plus haut. Le triplet (k, p, q) est uniquement déterminé par le triplet (b, c, d), $b \neq c$.

10. En revenant au polynôme cubique unitaire dont les racines sont 0, b et c, montrer que les racines du polynôme dérivé sont non seulement rationnelles mais même entières si et seulement si $d = \sqrt{D(0, b, c)}$ est divisible par 3, c'est-à-dire, dans la paramétrisation précédente, précisément lorsque j, respectivement k, est divisible par 3.
11. Lorsqu'elles sont rationnelles mais pas entières que peut-on dire de leurs dénominateurs ? Peut-on trouver un polynôme cubique à racines entières et dont la dérivée a au moins une racine demi-entière ?
12. Recueillir les fruits de vos efforts en calculant explicitement des polynômes unitaires, de racines $0 < b < c$ entières, et pour lesquels le polynôme dérivé a encore ses deux racines entières (on ne suppose pas b et c premiers entre eux). Il s'agit donc d'utiliser la paramétrisation précédente pour $0 < t = \frac{p}{q} < \frac{2}{3}$, ou encore $p = 1, 2, \dots$ et $q > \frac{3}{2}p$, et en prenant k multiple de 3 (*voir ci-dessous pour* $q < 21$ *et* $k = 3$.)
13. Comment se traduisent les invariances $(0, b, c) \mapsto (0, -b, c - b)$ ou $\mapsto (0, -c, b - c)$, au niveau du paramètre t ou du couple (p, q) ? (d'ailleurs pourquoi ai-je employé le mot « invariance » ?)
14. Pendant les vacances d'été, re-travailler ces résultats en utilisant l'anneau euclidien $\mathbb{Z}[\exp(2\pi i/3)]$.

Cadeau : voici la liste correspondant aux couples (p, q) premiers entre eux, $0 < \frac{p}{q} < \frac{2}{3}$, $1 \leqslant q \leqslant 20$, donnant donc $0 < b < c$, avec $k = 3$ pour que le polynôme dérivé ait des racines entières (les solutions pour $k = 6, 9, \dots$ ne sont pas indiquées). Dans chaque ligne en premier p/q puis $\delta(\frac{p}{q}) = \mathrm{pgcd}(4q^2 - 4pq - 3p^2, 4q^2 + 4pq - 3p^2)$ puis 0, b, c et le polynôme $X(X - b)(X - c)$, enfin les deux racines du polynôme dérivé.

1/2, 1, [0, 15, 63], $X^3 - 78X^2 + 945X$, [7, 45]
1/3, 3, [0, 21, 45], $X^3 - 66X^2 + 945X$, [9, 35]
1/4, 1, [0, 135, 231], $X^3 - 366X^2 + 31185X$, [55, 189]
1/5, 1, [0, 231, 351], $X^3 - 582X^2 + 81081X$, [91, 297]
1/6, 3, [0, 117, 165], $X^3 - 282X^2 + 19305X$, [45, 143]
1/7, 1, [0, 495, 663], $X^3 - 1158X^2 + 328185X$, [187, 585]
1/8, 1, [0, 663, 855], $X^3 - 1518X^2 + 566865X$, [247, 765]
1/9, 3, [0, 285, 357], $X^3 - 642X^2 + 101745X$, [105, 323]
1/10, 1, [0, 1071, 1311], $X^3 - 2382X^2 + 1404081X$, [391, 1197]
1/11, 1, [0, 1311, 1575], $X^3 - 2886X^2 + 2064825X$, [475, 1449]
1/12, 3, [0, 525, 621], $X^3 - 1146X^2 + 326025X$, [189, 575]

1/13, 1, [0, 1863, 2175], $X^3 - 4038X^2 + 4052025X$, [667, 2025]
1/14, 1, [0, 2175, 2511], $X^3 - 4686X^2 + 5461425X$, [775, 2349]
1/15, 3, [0, 837, 957], $X^3 - 1794X^2 + 801009X$, [297, 899]
1/16, 1, [0, 2871, 3255], $X^3 - 6126X^2 + 9345105X$, [1015, 3069]
1/17, 1, [0, 3255, 3663], $X^3 - 6918X^2 + 11923065X$, [1147, 3465]
1/18, 3, [0, 1221, 1365], $X^3 - 2586X^2 + 1666665X$, [429, 1295]
1/19, 1, [0, 4095, 4551], $X^3 - 8646X^2 + 18636345X$, [1435, 4329]
1/20, 1, [0, 4551, 5031], $X^3 - 9582X^2 + 22896081X$, [1591, 4797]
2/5, 16, [0, 9, 24], $X^3 - 33X^2 + 216X$, [4, 18]
2/7, 16, [0, 24, 45], $X^3 - 69X^2 + 1080X$, [10, 36]
2/9, 48, [0, 15, 24], $X^3 - 39X^2 + 360X$, [6, 20]
2/11, 16, [0, 72, 105], $X^3 - 177X^2 + 7560X$, [28, 90]
2/13, 16, [0, 105, 144], $X^3 - 249X^2 + 15120X$, [40, 126]
2/15, 48, [0, 48, 63], $X^3 - 111X^2 + 3024X$, [18, 56]
2/17, 16, [0, 189, 240], $X^3 - 429X^2 + 45360X$, [70, 216]
2/19, 16, [0, 240, 297], $X^3 - 537X^2 + 71280X$, [88, 270]
3/5, 1, [0, 39, 399], $X^3 - 438X^2 + 15561X$, [19, 273]
3/7, 1, [0, 255, 759], $X^3 - 1014X^2 + 193545X$, [115, 561]
3/8, 1, [0, 399, 975], $X^3 - 1374X^2 + 389025X$, [175, 741]
3/10, 1, [0, 759, 1479], $X^3 - 2238X^2 + 1122561X$, [319, 1173]
3/11, 1, [0, 975, 1767], $X^3 - 2742X^2 + 1722825X$, [403, 1425]
3/13, 1, [0, 1479, 2415], $X^3 - 3894X^2 + 3571785X$, [595, 2001]
3/14, 1, [0, 1767, 2775], $X^3 - 4542X^2 + 4903425X$, [703, 2325]
3/16, 1, [0, 2415, 3567], $X^3 - 5982X^2 + 8614305X$, [943, 3045]
3/17, 1, [0, 2775, 3999], $X^3 - 6774X^2 + 11097225X$, [1075, 3441]
3/19, 1, [0, 3567, 4935], $X^3 - 8502X^2 + 17603145X$, [1363, 4305]
3/20, 1, [0, 3999, 5439], $X^3 - 9438X^2 + 21750561X$, [1519, 4773]
4/7, 4, [0, 27, 195], $X^3 - 222X^2 + 5265X$, [13, 135]
4/9, 12, [0, 33, 105], $X^3 - 138X^2 + 3465X$, [15, 77]
4/11, 4, [0, 195, 459], $X^3 - 654X^2 + 89505X$, [85, 351]
4/13, 4, [0, 315, 627], $X^3 - 942X^2 + 197505X$, [133, 495]
4/15, 12, [0, 153, 273], $X^3 - 426X^2 + 41769X$, [63, 221]
4/17, 4, [0, 627, 1035], $X^3 - 1662X^2 + 648945X$, [253, 855]
4/19, 4, [0, 819, 1275], $X^3 - 2094X^2 + 1044225X$, [325, 1071]
5/8, 1, [0, 63, 1023], $X^3 - 1086X^2 + 64449X$, [31, 693]
5/9, 3, [0, 69, 429], $X^3 - 498X^2 + 29601X$, [33, 299]
5/11, 1, [0, 567, 1887], $X^3 - 2454X^2 + 1069929X$, [259, 1377]
5/12, 3, [0, 261, 741], $X^3 - 1002X^2 + 193401X$, [117, 551]

5/13, 1, [0, 1023, 2583], $X^3 - 3606X^2 + 2642409X$, [451, 1953]
5/14, 1, [0, 1287, 2967], $X^3 - 4254X^2 + 3818529X$, [559, 2277]
5/16, 1, [0, 1887, 3807], $X^3 - 5694X^2 + 7183809X$, [799, 2997]
5/17, 1, [0, 2223, 4263], $X^3 - 6486X^2 + 9476649X$, [931, 3393]
5/18, 3, [0, 861, 1581], $X^3 - 2442X^2 + 1361241X$, [357, 1271]
5/19, 1, [0, 2967, 5247], $X^3 - 8214X^2 + 15567849X$, [1219, 4257]
6/11, 16, [0, 21, 120], $X^3 - 141X^2 + 2520X$, [10, 84]
6/13, 16, [0, 48, 165], $X^3 - 213X^2 + 7920X$, [22, 120]
6/17, 16, [0, 120, 273], $X^3 - 393X^2 + 32760X$, [52, 210]
6/19, 16, [0, 165, 336], $X^3 - 501X^2 + 55440X$, [70, 264]
7/11, 1, [0, 87, 1935], $X^3 - 2022X^2 + 168345X$, [43, 1305]
7/12, 3, [0, 93, 765], $X^3 - 858X^2 + 71145X$, [45, 527]
7/13, 1, [0, 495, 2679], $X^3 - 3174X^2 + 1326105X$, [235, 1881]
7/15, 3, [0, 333, 1173], $X^3 - 1506X^2 + 390609X$, [153, 851]
7/16, 1, [0, 1287, 3975], $X^3 - 5262X^2 + 5115825X$, [583, 2925]
7/17, 1, [0, 1599, 4455], $X^3 - 6054X^2 + 7123545X$, [715, 3321]
7/18, 3, [0, 645, 1653], $X^3 - 2298X^2 + 1066185X$, [285, 1247]
7/19, 1, [0, 2295, 5487], $X^3 - 7782X^2 + 12592665X$, [1003, 4185]
7/20, 1, [0, 2679, 6039], $X^3 - 8718X^2 + 16178481X$, [1159, 4653]
8/13, 4, [0, 51, 675], $X^3 - 726X^2 + 34425X$, [25, 459]
8/15, 12, [0, 57, 297], $X^3 - 354X^2 + 16929X$, [27, 209]
8/17, 4, [0, 315, 1131], $X^3 - 1446X^2 + 356265X$, [145, 819]
8/19, 4, [0, 483, 1395], $X^3 - 1878X^2 + 673785X$, [217, 1035]
9/14, 1, [0, 111, 3135], $X^3 - 3246X^2 + 347985X$, [55, 2109]
9/16, 1, [0, 615, 4071], $X^3 - 4686X^2 + 2503665X$, [295, 2829]
9/17, 1, [0, 903, 4575], $X^3 - 5478X^2 + 4131225X$, [427, 3225]
9/19, 1, [0, 1551, 5655], $X^3 - 7206X^2 + 8770905X$, [715, 4089]
9/20, 1, [0, 1911, 6231], $X^3 - 8142X^2 + 11907441X$, [871, 4557]
10/17, 16, [0, 33, 288], $X^3 - 321X^2 + 9504X$, [16, 198]
10/19, 16, [0, 72, 357], $X^3 - 429X^2 + 25704X$, [34, 252]
11/17, 1, [0, 135, 4623], $X^3 - 4758X^2 + 624105X$, [67, 3105]
11/18, 3, [0, 141, 1725], $X^3 - 1866X^2 + 243225X$, [69, 1175]
11/19, 1, [0, 735, 5751], $X^3 - 6486X^2 + 4226985X$, [355, 3969]
11/20, 1, [0, 1071, 6351], $X^3 - 7422X^2 + 6801921X$, [511, 4437]
12/19, 4, [0, 75, 1443], $X^3 - 1518X^2 + 108225X$, [37, 975]
13/20, 1, [0, 159, 6399], $X^3 - 6558X^2 + 1017441X$, [79, 4293]

Voici une seconde liste, dans laquelle on a translaté le polynôme de manière à ce qu'il soit de la forme $X^3 - rX + s$. C'est toujours possible car la quantité b + c de la liste précédente est multiple de 3. A posteriori, on aurait sûrement dû étudier d'office le problème sous cette forme, car nos nouveaux triplets $(-\frac{b+c}{3}, \frac{2b-c}{3}, \frac{-b+2c}{3})$ sont eux primitifs. Le dernier nombre sur chaque ligne est la racine positive $\sqrt{\frac{1}{3}r}$ du polynôme dérivé.

1/2, 1, [−26, −11, 37], $X^3 - 1083X - 10582$, 19
1/3, 3, [−22, −1, 23], $X^3 - 507X - 506$, 13
1/4, 1, [−122, 13, 109], $X^3 - 13467X + 172874$, 67
1/5, 1, [−194, 37, 157], $X^3 - 31827X + 1126946$, 103
1/6, 3, [−94, 23, 71], $X^3 - 7203X + 153502$, 49
1/7, 1, [−386, 109, 277], $X^3 - 118803X + 11654498$, 199
1/8, 1, [−506, 157, 349], $X^3 - 201243X + 27725258$, 259
1/9, 3, [−214, 71, 143], $X^3 - 35643X + 2172742$, 109
1/10, 1, [−794, 277, 517], $X^3 - 487227X + 113707946$, 403
1/11, 1, [−962, 349, 613], $X^3 - 711507X + 205807394$, 487
1/12, 3, [−382, 143, 239], $X^3 - 111747X + 13055614$, 193
1/13, 1, [−1346, 517, 829], $X^3 - 1383123X + 576886178$, 679
1/14, 1, [−1562, 613, 949], $X^3 - 1858107X + 908673194$, 787
1/15, 3, [−598, 239, 359], $X^3 - 271803X + 51308998$, 301
1/16, 1, [−2042, 829, 1213], $X^3 - 3164187X + 2053388234$, 1027
1/17, 1, [−2306, 949, 1357], $X^3 - 4029843X + 2969650658$, 1159
1/18, 3, [−862, 359, 503], $X^3 - 562467X + 155657374$, 433
1/19, 1, [−2882, 1213, 1669], $X^3 - 6281427X + 5834600354$, 1447
1/20, 1, [−3194, 1357, 1837], $X^3 - 7708827X + 7962031946$, 1603
2/5, 16, [−11, −2, 13], $X^3 - 147X - 286$, 7
2/7, 16, [−23, 1, 22], $X^3 - 507X + 506$, 13
2/9, 48, [−13, 2, 11], $X^3 - 147X + 286$, 7
2/11, 16, [−59, 13, 46], $X^3 - 2883X + 35282$, 31
2/13, 16, [−83, 22, 61], $X^3 - 5547X + 111386$, 43
2/15, 48, [−37, 11, 26], $X^3 - 1083X + 10582$, 19
2/17, 16, [−143, 46, 97], $X^3 - 15987X + 638066$, 73
2/19, 16, [−179, 61, 118], $X^3 - 24843X + 1288442$, 91
3/5, 1, [−146, −107, 253], $X^3 - 48387X - 3952366$, 127
3/7, 1, [−338, −83, 421], $X^3 - 149187X - 11810734$, 223
3/8, 1, [−458, −59, 517], $X^3 - 240267X - 13970374$, 283
3/10, 1, [−746, 13, 733], $X^3 - 546987X + 7108634$, 427

3/11, 1, [−914, 61, 853], $X^3 - 783363X + 47558162$, 511
3/13, 1, [−1298, 181, 1117], $X^3 - 1482627X + 262425746$, 703
3/14, 1, [−1514, 253, 1261], $X^3 - 1973163X + 483015962$, 811
3/16, 1, [−1994, 421, 1573], $X^3 - 3313803X + 1320492602$, 1051
3/17, 1, [−2258, 517, 1741], $X^3 - 4198467X + 2032419026$, 1183
3/19, 1, [−2834, 733, 2101], $X^3 - 6491523X + 4364453522$, 1471
3/20, 1, [−3146, 853, 2293], $X^3 - 7941387X + 6153352634$, 1627
4/7, 4, [−74, −47, 121], $X^3 - 11163X - 420838$, 61
4/9, 12, [−46, −13, 59], $X^3 - 2883X - 35282$, 31
4/11, 4, [−218, −23, 241], $X^3 - 53067X - 1208374$, 133
4/13, 4, [−314, 1, 313], $X^3 - 98283X + 98282$, 181
4/15, 12, [−142, 11, 131], $X^3 - 18723X + 204622$, 79
4/17, 4, [−554, 73, 481], $X^3 - 271803X + 19452602$, 301
4/19, 4, [−698, 121, 577], $X^3 - 417387X + 48732266$, 373
5/8, 1, [−362, −299, 661], $X^3 - 328683X - 71545318$, 331
5/9, 3, [−166, −97, 263], $X^3 - 53067X - 4234826$, 133
5/11, 1, [−818, −251, 1069], $X^3 - 937443X - 219484942$, 559
5/12, 3, [−334, −73, 407], $X^3 - 141267X - 9923474$, 217
5/13, 1, [−1202, −179, 1381], $X^3 - 1692003X - 297133198$, 751
5/14, 1, [−1418, −131, 1549], $X^3 - 2213643X - 287739142$, 859
5/16, 1, [−1898, −11, 1909], $X^3 - 3623403X - 39856102$, 1099
5/17, 1, [−2162, 61, 2101], $X^3 - 4546083X + 277084082$, 1231
5/18, 3, [−814, 47, 767], $X^3 - 626547X + 29343886$, 457
5/19, 1, [−2738, 229, 2509], $X^3 - 6922083X + 1573148018$, 1519
6/11, 16, [−47, −26, 73], $X^3 - 4107X - 89206$, 37
6/13, 16, [−71, −23, 94], $X^3 - 7203X - 153502$, 49
6/17, 16, [−131, −11, 142], $X^3 - 18723X - 204622$, 79
6/19, 16, [−167, −2, 169], $X^3 - 28227X - 56446$, 97
7/11, 1, [−674, −587, 1261], $X^3 - 1194483X - 498899518$, 631
7/12, 3, [−286, −193, 479], $X^3 - 174243X - 26439842$, 241
7/13, 1, [−1058, −563, 1621], $X^3 - 2031987X - 965555134$, 823
7/15, 3, [−502, −169, 671], $X^3 - 365403X - 56926298$, 349
7/16, 1, [−1754, −467, 2221], $X^3 - 4113723X - 1819261078$, 1171
7/17, 1, [−2018, −419, 2437], $X^3 - 5093427X - 2060585854$, 1303
7/18, 3, [−766, −121, 887], $X^3 - 694083X - 82212482$, 481
7/19, 1, [−2594, −299, 2893], $X^3 - 7593843X - 2243828158$, 1591
7/20, 1, [−2906, −227, 3133], $X^3 - 9156027X - 2066721046$, 1747
8/13, 4, [−242, −191, 433], $X^3 - 141267X - 20014126$, 217

8/15, 12, [−118, −61, 179], $X^3 - 24843X - 1288442$, 91
8/17, 4, [−482, −167, 649], $X^3 - 340707X - 52240606$, 337
8/19, 4, [−626, −143, 769], $X^3 - 501843X - 68839342$, 409
9/14, 1, [−1082, −971, 2053], $X^3 - 3164187X - 2156926966$, 1027
9/16, 1, [−1562, −947, 2509], $X^3 - 4815867X - 3711347926$, 1267
9/17, 1, [−1826, −923, 2749], $X^3 - 5871603X - 4633159102$, 1399
9/19, 1, [−2402, −851, 3253], $X^3 - 8537907X - 6649463806$, 1687
9/20, 1, [−2714, −803, 3517], $X^3 - 10189947X - 7664745814$, 1843
10/17, 16, [−107, −74, 181], $X^3 - 24843X - 1433158$, 91
10/19, 16, [−143, −71, 214], $X^3 - 35643X - 2172742$, 109
11/17, 1, [−1586, −1451, 3037], $X^3 - 6922083X - 6989005582$, 1519
11/18, 3, [−622, −481, 1103], $X^3 - 917427X - 329997746$, 553
11/19, 1, [−2162, −1427, 3589], $X^3 - 9795747X - 11072689486$, 1807
11/20, 1, [−2474, −1403, 3877], $X^3 - 11560107X - 13457152294$, 1963
12/19, 4, [−506, −431, 937], $X^3 - 659883X - 204346582$, 469
13/20, 1, [−2186, −2027, 4213], $X^3 - 13318347X - 18667895686$, 2107

Exercice supplémentaire : en examinant ces listes on trouve que les deux polynômes correspondant à $t = \frac{2}{5}$ et $\frac{2}{9}$ sont ceux qui minimisent l'écart entre les deux racines du polynôme dérivé. Avec la deuxième normalisation, ce sont les polynômes $X^3 - 147X \pm 286$, de dérivée $3(X^2 - 49) = 3(X - 7)(X + 7)$. Pouvez vous infirmer ou prouver que 7 est bien la demi-distance minimale pour l'écart entre les deux racines du polynôme dérivé P' lorsque P de degré 3 a trois racines distinctes entières et P' a aussi deux racines entières ? (note : si on autorisait une racine double, la semi-distance minimale serait 1, avec $X^2(X - 3)$ comme exemple).

Si cela est vrai le polynôme $\boxed{X^3 - 147X - 286 = (X + 11)(X + 2)(X - 13)}$ et ses semblables (translation comme $X^3 - 3X^2 - 144X - 140 = (X + 10)(X + 1)(X - 14)$, symétrie $(X-11)(X-2)(X+13)$) sont donc en un certain sens les plus « petits » possibles. On notera que les solutions avec $t = \frac{p}{q} = 1$, donc $p = q = 1$, sont de la forme $(b, c) = k(-3, +5)$ mais qu'il faut prendre k multiple de 3 pour assurer des racines entières à P', donc $a = 0$, $b = -9$, $c = 15$, qui correspond en rétablissant l'ordre à $0, 9, 24$, donc effectivement à $t = \frac{2}{5}$ dans notre première liste, et donc finalement au polynôme avec les racines $-11, -2, 13$ comme ci-dessus ! La demi-distance en question est $\frac{1}{3}d = \delta(\frac{p}{q})^{-1}(4q^2 + 3p^2)$ et il faut voir si elle est toujours au moins 7 lorsque $0 < \frac{p}{q} < \frac{2}{3}$, $1 \leqslant p$, $1 \leqslant q$, $(p, q) = 1$. Ça semble marcher, à vous de vous en assurer !